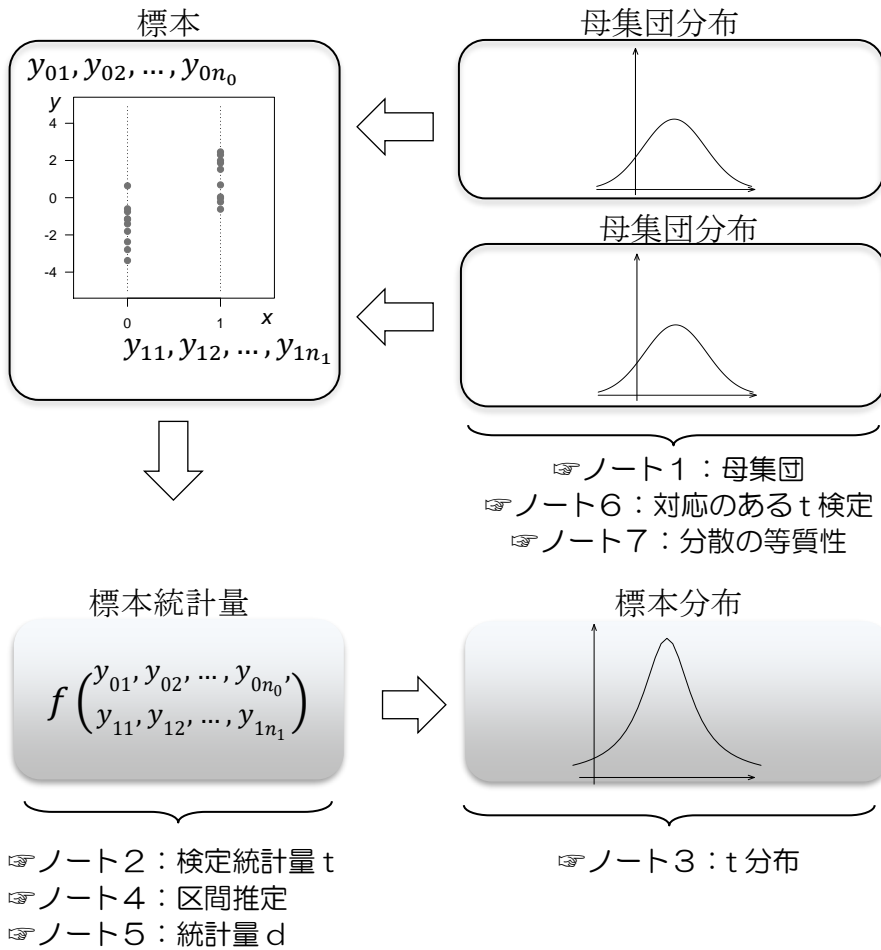


学習の目標

- 二群の平均値の差の検定である「対応のない t 検定」のロジックがわかり、論文で出会った際に適切に解釈できる。
- t 検定を行う際に母集団に想定される仮定を理解できる。
- 仮説検定における二つの仮説（帰無仮説と対立仮説）が理解でき、適切に想定できる。
- 標本分布の標準偏差を標本誤差と呼び、標本平均値差が従う標本分布の標準誤差を $\sigma_{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}$ と書くことが分かる。
- t 値という統計量は、標本平均値差とその標本誤差の推定量の比の値であることが分かる。
- 帰無仮説の下で t 値が従う標本分布を t 分布と言い、自由度が大きくなると標本正規分布に近づくことが分かる。
- t 検定では、データから得られた t 値が、限界値を超えて t 分布の棄却域に入るかどうかを検定する。棄却域に入った場合、帰無仮説という仮定が誤っていたと棄却する。
- t 値が棄却域に落ちる確率を有意水準 α と呼び、帰無仮説が真の時、誤って棄却する第一種の過誤を表すことが分かる。
- 対立仮説が正しい時に t 値が従う分布を非心 t 分布と呼び、これに基づいて対立仮説が正しいのに帰無仮説を保持してしまう誤りを β （第二種の過誤）と呼ぶことが分かる。
- 信頼区間の作り方がわかり、95%信頼区間とは「標本から計算された区間が母集団のパラメータ値を含む確率」が 95%であることを意味するということになる。
- サンプルサイズをあまりに大きくすると、細かい差まで際限なく検出できるようになり、この結果実質的には小さな差しかないのに有意になってしまうことが分かる。
- 平均値の差が標準偏差が何個分なのかを表す統計量としてコーエンの d という効果量があることが分かる。
- 二種類の過誤と母集団効果量からサンプルサイズの決定に利用できる。

本講から数回にわたり、t 検定と呼ばれる統計手法を学びます。これから学んでいく統計手法の中ではもっとも単純なモデルの一つで、論文などでも目にする事の多い伝統的な統計手法です。しかし「単純」なモデルではありますが、より発展的な手法の基礎となるモデルでもあります。しっかりと身に付けてください。

見取り図



データの形式

ID	グループ (説明変数)	観測値 (応答変数)
1	0	2.1
2	0	3.2
⋮	⋮	⋮
n_0	0	3.1
$n_0 + 1$	1	2.3
$n_0 + 2$	1	1.2
⋮	⋮	⋮
$n_0 + n_1$	1	1.5

(1) 目的 (リサーチクエスチョン)

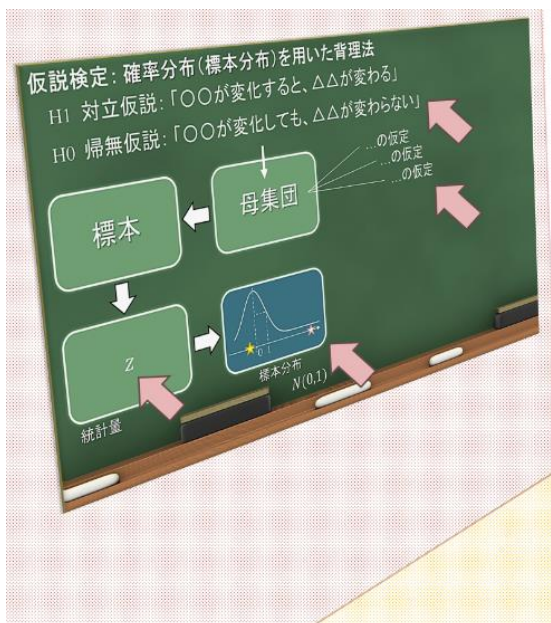
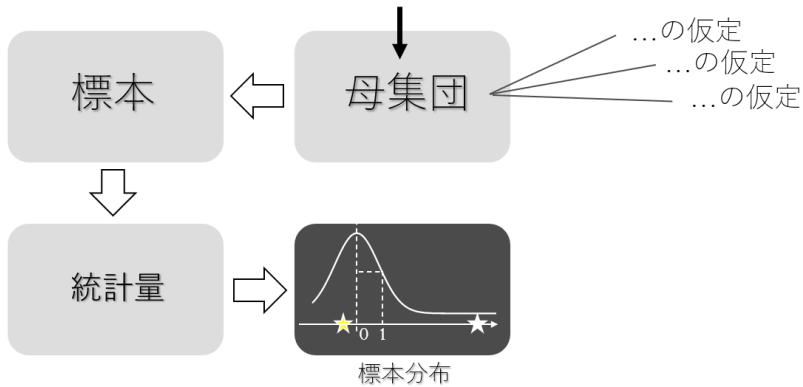
標本が採られてきていると想定される二種類の母集団の母平均 (期待値) に差があるか否か、判断を下す二群の差の検定を学ぶ。

(2) 考え方

仮説検定: 確率分布 (標本分布) を用いた背理法

H1 対立仮説: 「〇〇が変化すると、△△が変わる」

H0 帰無仮説: 「〇〇が変化しても、△△が変わらない」



検定

(知りたい1) どこを超えたら「ありえない」?

(知りたい2) zってどんな統計量?

(知りたい3) どんな仮定が必要なの?

二群の差の検定

(知りたい4) なんで二群の差の検定になるの?



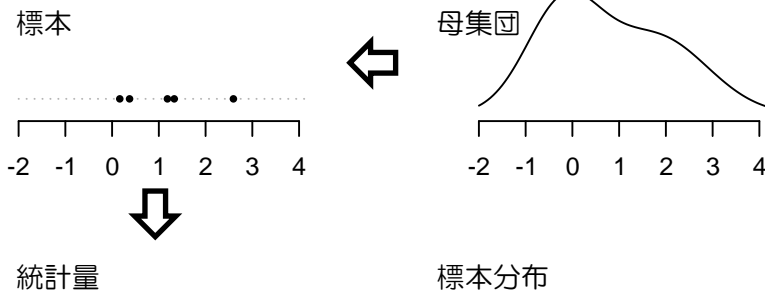
○ 仮説検定

一回しか標本を採っていない（真の標本分布は分からない）のに、①条件さえ整えば標本分布の姿を特定できる統計量があることに注目し、②母集団に対する帰無仮説を、③その統計量の標本分布を用いた背理法で棄却しようとする試み。

(1) ポイント1：標本分布を特定する

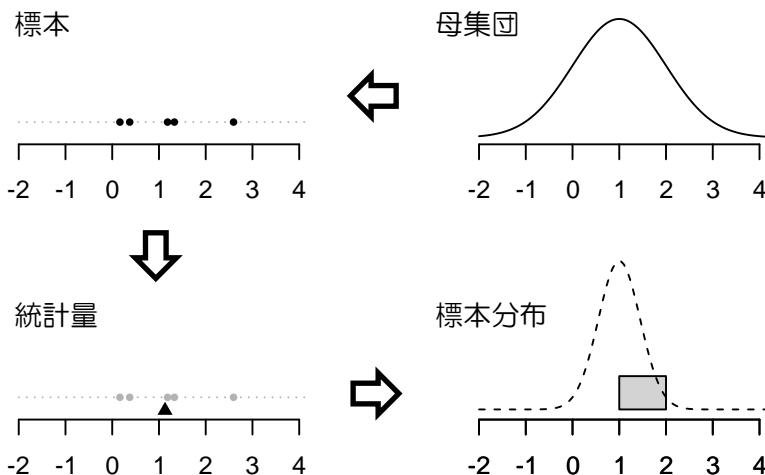
① 普通の統計量

一つの標本では、標本分布は分からない



② 特殊な統計量

数学的な性質が解明されている一部の統計量は、条件さえ整えば、標本を採らずとも、標本分布が分かる



(2) ポイント2：母集団への仮説

- ① 帰無仮説 Null Hypothesis (H0)
棄却する目的で設定される仮説
- ② 対立仮説 Alternative Hypothesis (H1)
帰無仮説が棄却された際に採択する仮説



その他に必要な標本分布を同定するための仮定

【標本の抽出の仕方に関する仮定】

- ① 独立性の仮定： 各要素は互いに独立
- ② 同一分布の仮定： 標本は同じ分布から抽出
- ③ 無作為性の仮定： 標本はランダムに抽出

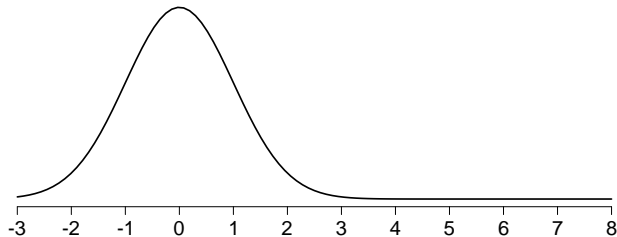
$$y_1, y_2, \dots, y_n \stackrel{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

【母集団の姿に関する仮定】

例：t検定の場合

- ① 正規性の仮定： 母集団の分布は正規分布
- ② 分散の等質性の仮定： 二つの母集団の分散は同じ

(3) ポイント3：標本分布を用いた背理法

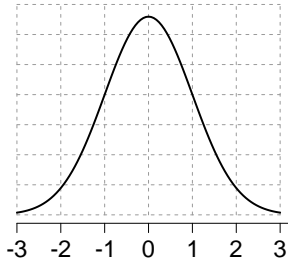


- ① 限界値（臨界値） t_c
よくあることと滅多にないことを分ける基準
- ② p値
帰無仮説が正しい時に、今回の検定統計量の実現値が、今以上に極端になる確率のこと
- ③ 棄却域と受容域
棄却域：限界値より極端な値を示した領域
受容域：棄却域ではない領域
- ④ 有意水準 α
統計量が棄却域に入る確率のこと

📖 ノート2 標本分布1：標準正規分布からt分布へ

(1) 標準正規分布 Standard Normal Distribution

これは、平均が0、分散が1の正規分布 $N(0, 1)$ 。

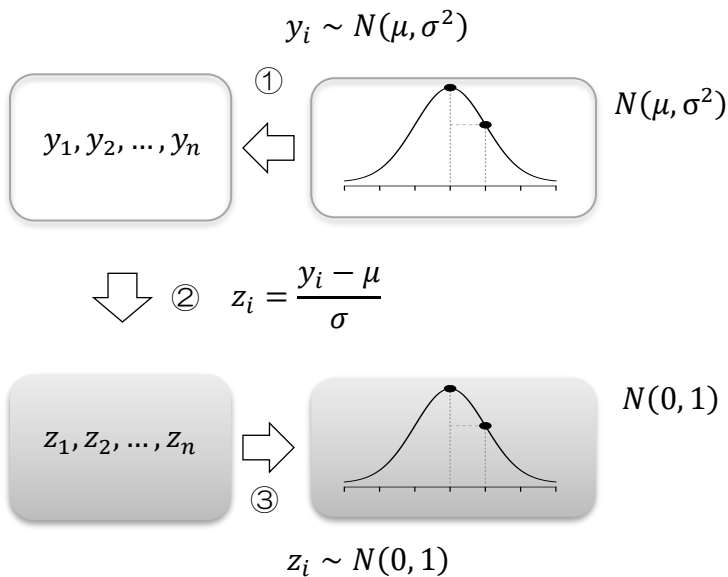


(2) 標準化 Standardization

これは、「分布の中心」から「標準偏差何個分なのか」を表すように、変数を変換すること。

$$z_i = \frac{y_i - \mu}{\sigma}$$

変数 y_i が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、標準化という操作で新しく作られた新しい統計量 z_i は標準正規分布に従う。





偏差値

① 例題

関東の予備校の英語の模試で 60 点を取った A 君と関西の予備校の英語の模試で 60 点を取った B 君はどちらが英語の成績が良いと言えるのだろうか？

② 偏差値

異なる標本間での点数の比較のために各データが「平均から標準偏差何個分」の位置にあるか計算したもの。

$$z_i = 50 + 10 \times \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$$

※ただし、もとのテストの点数と似たような値に収まるよう 10 をかけて 50 を足している。

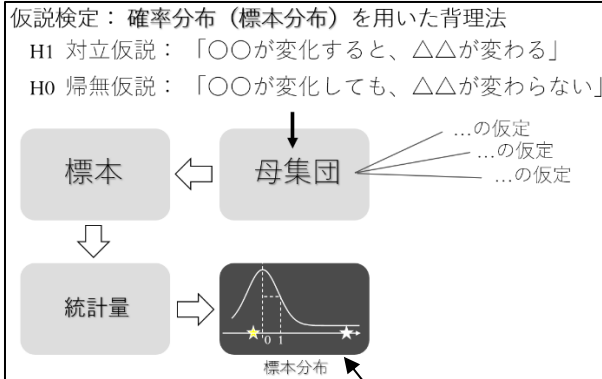
③ 標準化

異なる標本間での点数の比較のために各データが「平均から標準偏差何個分」の位置にあるか計算したもの。

$$z_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$$



ねらい

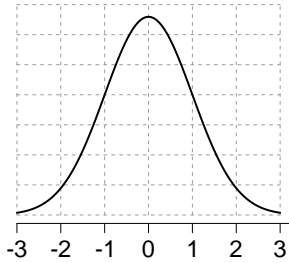


できることなら、ここに標準正規分布を使いたい。

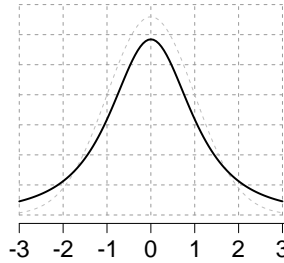
(3) t分布 t Distribution

これは、 σ ではなく、 $\hat{\sigma}$ を用いるという補正された標準化得点(統計量)がしたがう、標準正規分布になりかけた分布。

標準正規分布 $N(0,1)$



t分布 (例: $t(2)$)



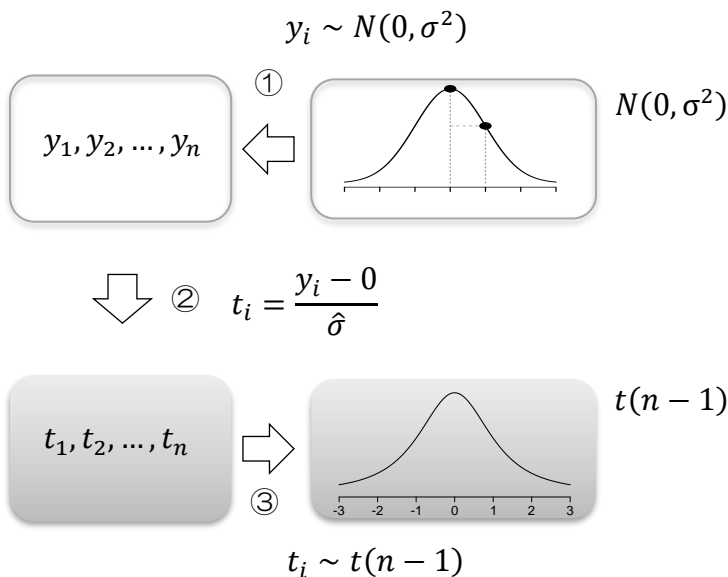
※ 自由度: どれくらい標準正規分布に近いかを表すパラメータ。値が大きいほど、 $N(0,1)$ に近くなる。

(4) t値 t value

これは、「分布の中心」から「標準偏差何個分なのか」を表す標準化得点の計算過程で、 σ ではなく、 $\hat{\sigma}$ を用いたもの。

$$t_i = \frac{y_i - \mu}{\hat{\sigma}}$$

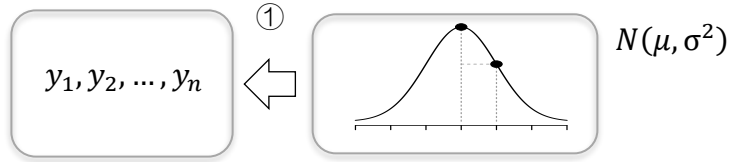
変数 y_i が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、補正された標準化という操作で作られた統計量 t_i は $t(n-1)$ に従う。



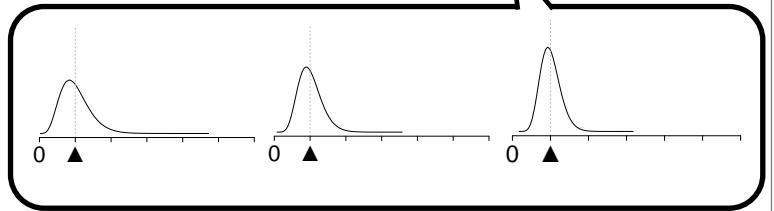
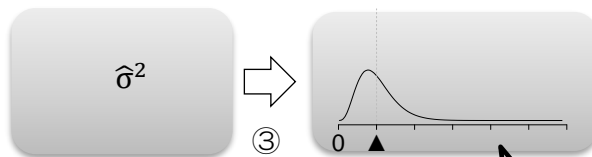


推定された分散の精度

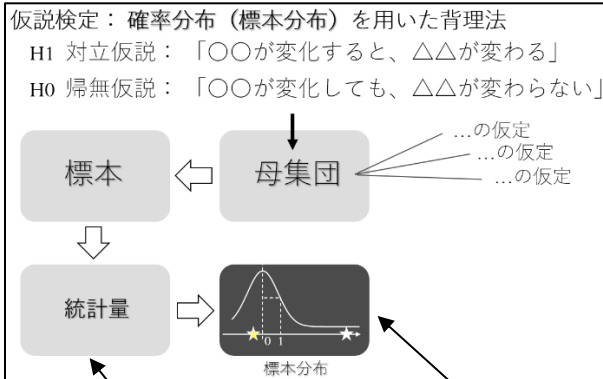
サンプルサイズが大きくなれば、大きくなるほど、分散の推定精度は上がる。



②
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$



ねらい



人間が計算ができるようにするため、zからtに変更。

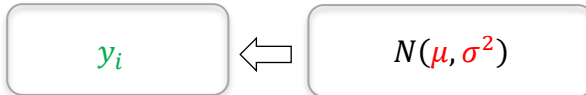
統計量に変更されたので標準正規分布からt分布に変化。

(1) 母集団の平均が0であることの検定

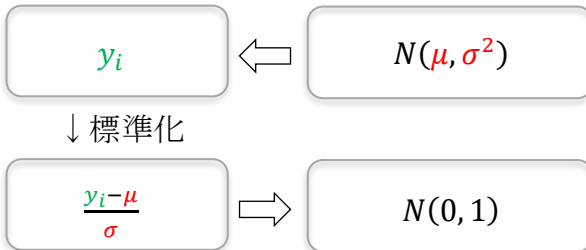
■ 帰無仮説 H_0

標本がしたがう母集団 (正規分布) の中心 μ は 0。

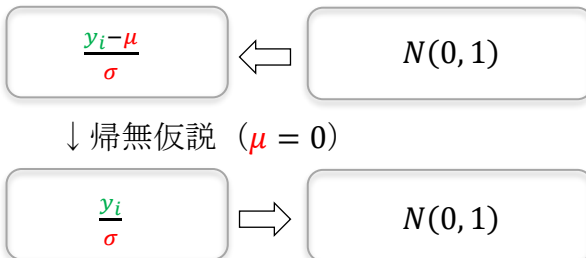
Step 1 正規分布にしたがう統計量を見つける



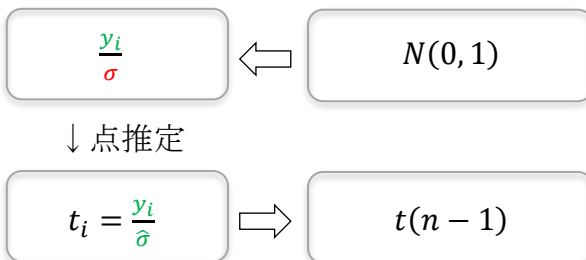
Step 2 標準化 (z 値を考える)



Step 3 帰無仮説を導入



Step 4 補正された標準化 (t 値を考える)





自由度

今回の t 値である下記の量が $t(n-1)$ に従うことの証明

$$t_i = \frac{y_i - \mu}{\hat{\sigma}}$$

【証明】 次の F 値が自由度 $1, n-1$ の F 分布に従うことを示す

$$\begin{aligned} F_i = t_i^2 &= \left(\frac{y_i - \mu}{\hat{\sigma}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \bigg/ \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right)^2 \quad \Rightarrow \text{分子と分母に } \frac{1}{\sigma^2} \text{ をかける} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{分子}) &= \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1) \\ &= \{\text{自由度 } 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数}\} / 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{分母}) &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} / (n-1) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \{(y_i - \mu) - (\bar{y} - \mu)\}^2}{\sigma^2} / (n-1) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \{(y_i - \mu)^2 - 2(y_i - \mu)(\bar{y} - \mu) + (\bar{y} - \mu)^2\}}{\sigma^2} / (n-1) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)(\bar{y} - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{y} - \mu)^2}{\sigma^2} / (n-1) \\ &= \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2(\bar{y} - \mu) \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{y} - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} / (n-1) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2(\bar{y} - \mu)n(\bar{y} - \mu)}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{y} - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} / (n-1) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{2n(\bar{y} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{y} - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} / (n-1) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{n(\bar{y} - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} / (n-1) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \right\} / (n-1) \end{aligned}$$

標準化得点 $\sim \chi^2(n) \uparrow$ \uparrow 標準化得点 $\sim \chi^2(1)$

$$= \{\text{自由度 } n-1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数}\} / (n-1)$$

$$\therefore F_i = t_i^2 = \frac{\{\text{自由度 } 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数}\} / 1}{\{\text{自由度 } n-1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数}\} / (n-1)} \sim F(1, n-1)$$

(2) 平均値が0であることの検定

■ 帰無仮説 H_0

標本平均がしたがう標本分布（正規分布）の中心 μ は 0。

Step 1 正規分布にしたがう統計量を見つける

$$y_i \leftarrow N(\mu, \sigma^2)$$

↓ 中心極限定理

$$\bar{y} \leftarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Step 2 標準化（z 値を考える）

$$\bar{y} \leftarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

↓ 標準化

$$\frac{\bar{y} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leftarrow N(0, 1)$$

Step 3 帰無仮説を導入

$$\frac{\bar{y} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leftarrow N(0, 1)$$

↓ 帰無仮説 ($\mu = 0$)

$$\frac{\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leftarrow N(0, 1)$$

Step 4 補正された標準化（t 値を考える）

$$\frac{\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leftarrow N(0, 1)$$

↓ 点推定

$$\frac{\bar{y}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \leftarrow t(n-1)$$



自由度

今回の t 値である下記の量が $t(n-1)$ に従うことの証明

$$t = \frac{\bar{y} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

【証明】 次の F 値が自由度 $1, n-1$ の F 分布に従うことを示す

$$\begin{aligned} F = t^2 &= \left(\frac{\bar{y} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right)^2 \\ &= \frac{\left(\frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2}{\left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(分子)} &= \left(\frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 \sim \chi^2(1) \\ &= \{ \text{自由度 } 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数} \} / 1 \end{aligned}$$

$$\text{(分母)} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

※ 一つ前と同じ計算になる

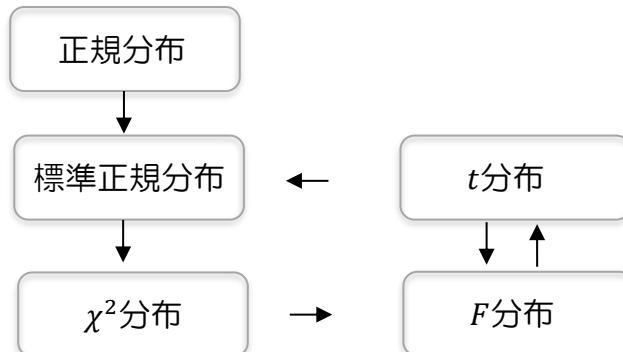
$$= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right)^2 - \left(\frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 \right\} / (n-1)$$

$$= \{ \text{自由度 } n-1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数} \} / (n-1)$$

$$\therefore F_i = t_i^2 = \frac{\{ \text{自由度 } 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数} \} / 1}{\{ \text{自由度 } n-1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数} \} / (n-1)} \sim F(1, n-1)$$



分布同士の関係

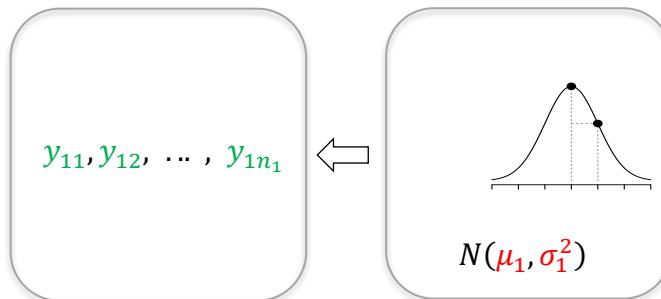
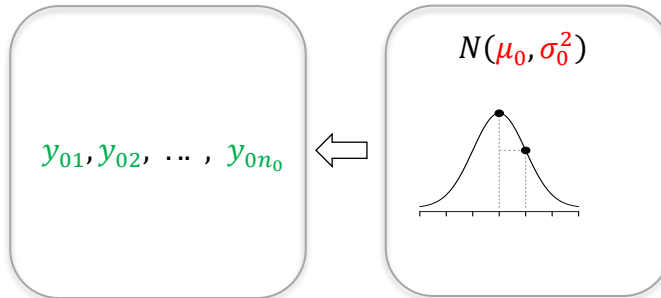


(3) 二群の平均値差の検定

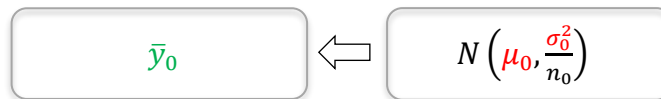
■ 帰無仮説 H_0

二つのグループの標本平均の差がしたがう標本分布（正規分布）の中心 $\mu_1 - \mu_0$ は 0。

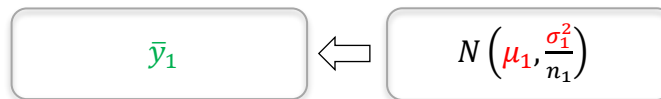
Step 1 正規分布にしたがう統計量を見つける



↓ 中心極限定理



+



↓ 再生性





再生性 (正規分布)

$$y_0 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$$

$$y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

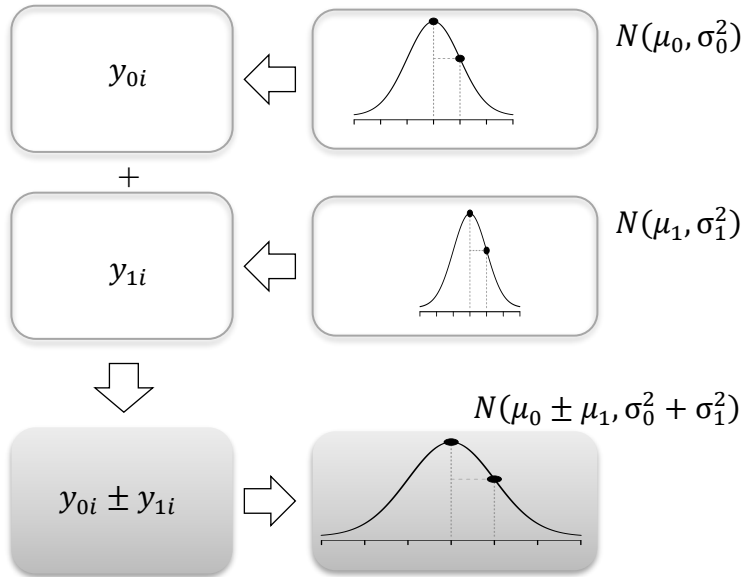
⋮

$$y_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$$

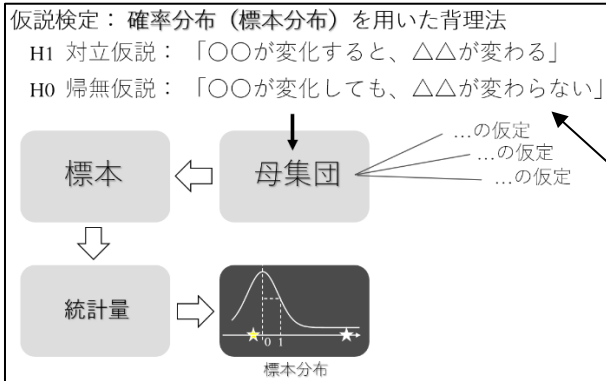
+) _____

$$y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

$$\sim N(\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n, \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$$



ねらい



「従属変数 (△△) に変化があるか」という H0 を吟味するために中心極限定理と再生性を使って $\mu_1 - \mu_0 = 0$ という帰無仮説を検定。

Step 2 標準化 (z 値を考える)

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_0 \leftarrow N\left(\mu_1 - \mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

↓ 標準化

$$\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0) - (\mu_1 - \mu_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}} \leftarrow N(0, 1)$$

Step 3 帰無仮説を導入

$$\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0) - (\mu_1 - \mu_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}} \leftarrow N(0, 1)$$

↓ 帰無仮説 ($\mu_1 - \mu_0 = 0$)

$$\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}} \leftarrow N(0, 1)$$

Step 4 補正された標準化 (t 値を考える)

$$\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0)}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}} \leftarrow N(0, 1)$$

↓ 点推定

$$\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_0^2}{n_0} + \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}}} \leftarrow t\left(\frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_0^2 + \hat{\sigma}_1^2}{n_0 + n_1}\right)^2}{\frac{\hat{\sigma}_0^4}{n_0^2(n_0-1)} + \frac{\hat{\sigma}_1^4}{n_1^2(n_1-1)}}\right)$$

⇒ Welch の t 検定

↓ 分散等質性の仮定 ($\sigma^2 = \sigma_0^2 = \sigma_1^2$)

$$\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}}} \leftarrow t(n_0 + n_1 - 2)$$



自由度

今回の t 値である下記の量が $t(n_0 + n_1 - 2)$ に従うことの証明

$$t = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0) - (\mu_1 - \mu_0)}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}}}$$

【証明】 次の F 値が自由度 $1, n_0 + n_1 - 2$ の F 分布に従うことを示す

$$\begin{aligned} F = t^2 &= \left(\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0) - (\mu_1 - \mu_0)}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0) - (\mu_1 - \mu_0)}{\sigma / \sqrt{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}}} \right)^2 \bigg/ \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma} \right)^2 \\ \text{(分子)} &= \left(\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_0) - (\mu_1 - \mu_0)}{\sigma / \sqrt{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}}} \right)^2 \sim \chi^2(1) \\ &= \{ \text{自由度 } 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数} \} / 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(分母)} &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{n_0 + n_1 - 2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_0} (y_{i0} - \bar{y}_0)^2 + \sum_{i=1}^{n_1} (y_{i1} - \bar{y}_1)^2 \right\} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n_0} (y_{i0} - \bar{y}_0)^2 + \sum_{i=1}^{n_1} (y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{(n_0 + n_1 - 2)} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n_0} \frac{(y_{i0} - \bar{y}_0)^2}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{\sigma^2} \right\} / (n_0 + n_1 - 2) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n_0} \frac{\{(y_{i0} - \mu_0) - (\bar{y}_0 - \mu_0)\}^2}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{\sigma^2} \right] / (n_0 + n_1 - 2) \\ &= \left[\left\{ \sum_{i=1}^{n_0} \frac{(y_{i0} - \mu_0)^2}{\sigma^2} - \frac{2(\bar{y}_0 - \mu_0) \sum_{i=1}^{n_0} (y_{i0} - \mu_0)}{\sigma^2} + n \frac{(\bar{y}_0 - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right\} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{\sigma^2} \right] / (n_0 + n_1 - 2) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{y_{i0} - \mu_0}{\sigma} \right)^2 - \frac{2n_0(\bar{y}_0 - \mu_0)}{\sigma^2} + \frac{n_0(\bar{y}_0 - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right] + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(y_{i1} - \bar{y}_1)^2}{\sigma^2} \bigg/ (n_0 + n_1 - 2) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{y_{i0} - \mu_0}{\sigma} \right)^2 - \left(\frac{\bar{y}_0 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n_0}} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{y_{i1} - \mu_1}{\sigma} \right)^2 - \left(\frac{\bar{y}_1 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n_1}} \right)^2 \right] / (n_0 + n_1 - 2) \\ &= \{ \text{自由度 } n_0 - 1 + n_1 - 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数} \} / (n_0 + n_1 - 2) \end{aligned}$$

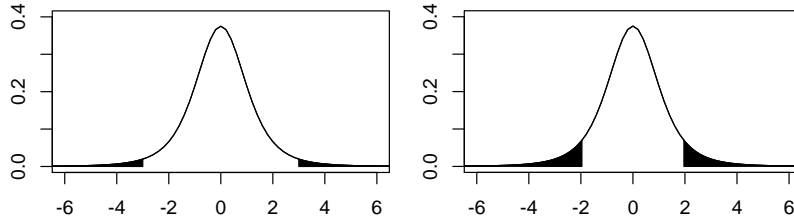
$$\therefore F_i = t_i^2 = \frac{\{ \text{自由度 } 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数} \} / 1}{\{ \text{自由度 } n_0 - 1 + n_1 - 1 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布に従う変数} \} / (n_0 + n_1 - 2)}$$

$$\sim F(1, n_0 + n_1 - 2)$$

📖 補足：二種類の過誤

(1) 研究者が判断基準を用意するということ

データから $t = 2$ だった!

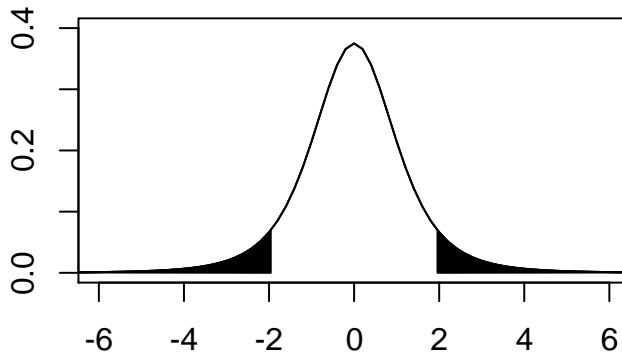


(2) 二種類の過誤

真実/判断	H0	H1
H0	正しい判断 $1 - \alpha$	第一種の過誤 α
H1	第二種の過誤 β	正しい判断 $1 - \beta$

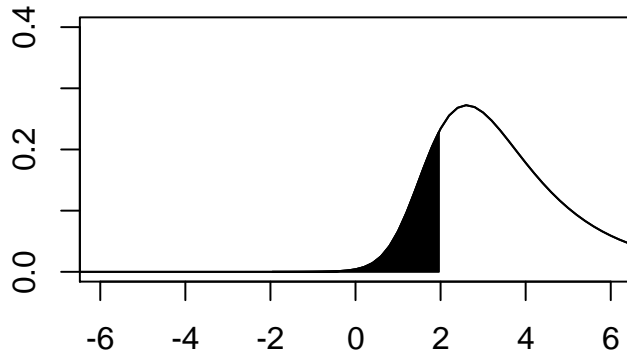
① 第一種の過誤 α

「H0 が真」であるときの条件付き確率
= 帰無仮説の方が正しいのに棄却してしまうリスク

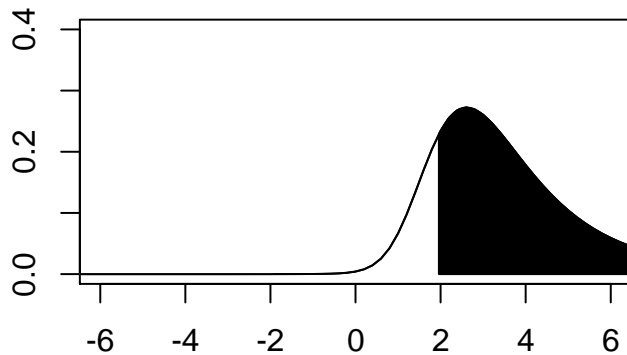


② 第二種の過誤 β

「H1 が真」であるときの条件付き確率
= H1 が正しいのに H0 を棄却できないリスク。



③ 検定力 $1 - \beta$ 「H1 が真」であるときの条件付き確率
H1 の方が正しいときにちゃんと H1 を採用できる確率。



(3) 片側検定 (非推奨)

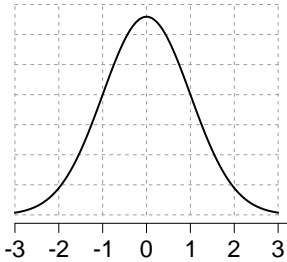
何らかの理由で t 値の符号が必ず正/負であることが明白なとき、一方の棄却域を消し反対側の棄却域を倍にする検定。

📖 補足 標本分布2：標準正規分布からカイ二乗分布へ

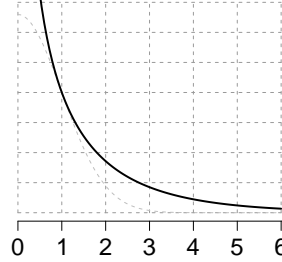
(1) カイ二乗分布 Chi-squared (Chi-square) distribution

これは、平均が 0、分散が 1 の正規分布 $N(0, 1)$ に独立にしたがう n 個の変数 (z 値) の平方和がしたがう確率分布。

標準正規分布 $N(0,1)$



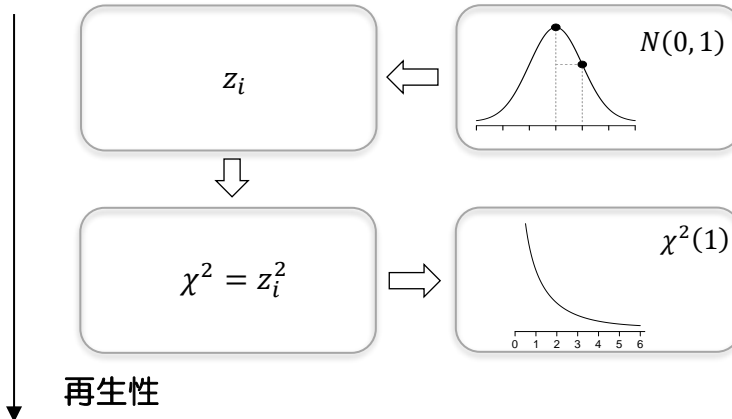
カイ二乗分布 (例: $\chi^2(1)$)



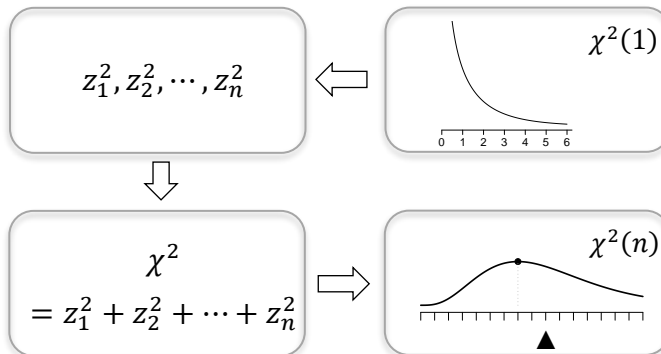
(2) カイ二乗統計量

これは、平均が 0、分散が 1 の正規分布 $N(0, 1)$ に独立にしたがう n 個の変数 (z 値) の平方和。

■ 自由度 1 のカイ二乗分布

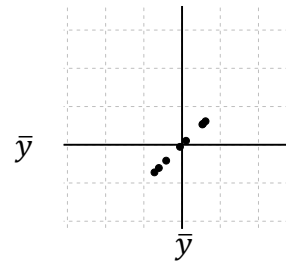
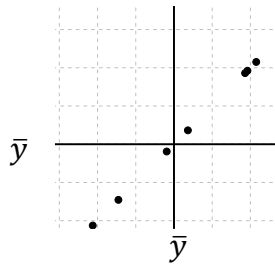


■ 自由度 n のカイ二乗分布





平方和と分散



① 平方和

$$SS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

② 分散

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

③ 不偏分散

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$



再生性と自由度 (カイ二乗分布)

$$z_1^2 \sim \chi^2(1)$$

$$z_2^2 \sim \chi^2(1)$$

⋮

$$z_n^2 \sim \chi^2(1)$$

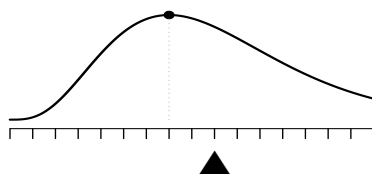
+) _____

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 \sim \chi^2(n)$$



カイ二乗分布の期待値とモード

自由度 ν のカイ二乗分布



期待値 : ν

分散 : 2ν

モード : $\nu - 2$



全知全能性とカイ二乗値

① 全知全能の視点

$$z_i = \frac{y_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

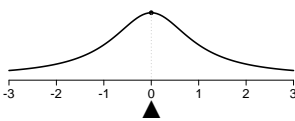
② 非全知全能の視点

$$t_i = \frac{y_i - \mu}{\hat{\sigma}} \sim t(n - 1)$$

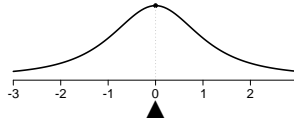


t 分布と自由度

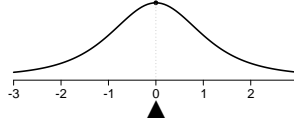
df = 1



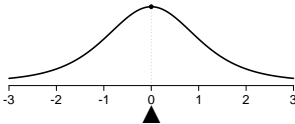
df = 2



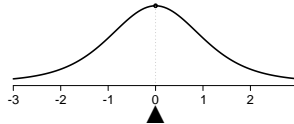
df = 3



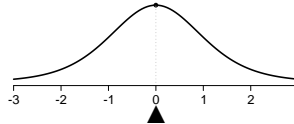
df = 4



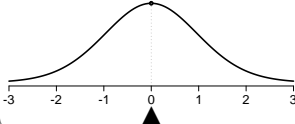
df = 5



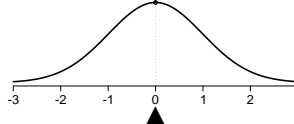
df = 6



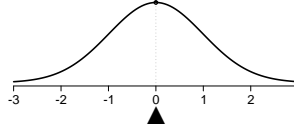
df = 20



df = 99



df = 100



不偏分散のしたがう標本分布

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n - 1) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (n - 1) \times \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{(n - 1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - 1) \end{aligned}$$



全知全能性とカイ二乗値

① 全知全能の視点

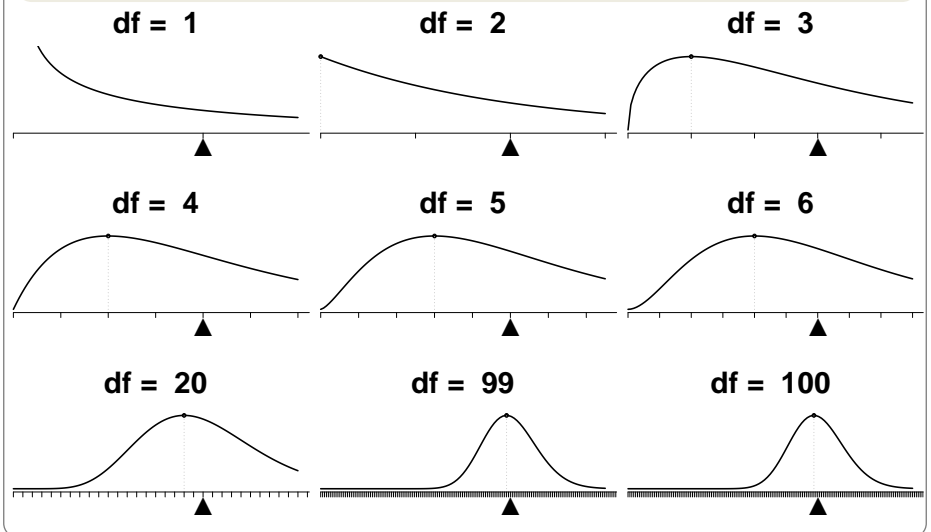
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

② 非全知全能の視点

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$



カイ二乗分布と自由度

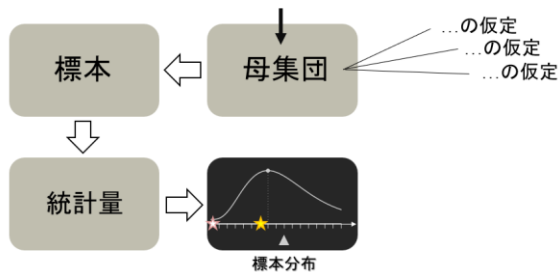


ねらい

仮説検定: 確率分布(標本分布)を用いた背理法

H1 対立仮説: 「〇〇が変化すると、△△が変わる」

H0 帰無仮説: 「〇〇が変化しても、△△が変わらない」

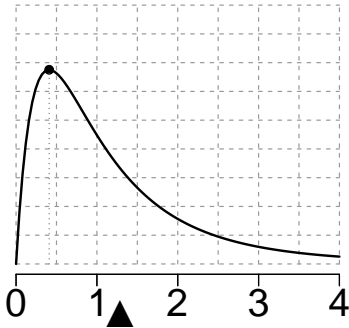


平均ではなく、分散(平方和)に関する帰無仮説を立てる

補足 標本分布3 : カイ二乗分布から F 分布へ

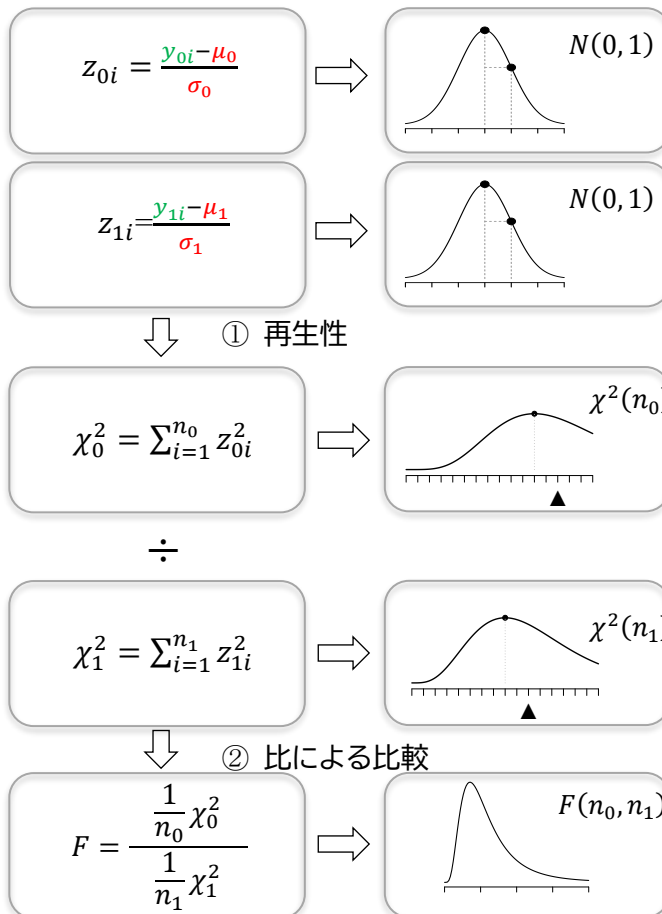
(1) F 分布 F distribution

これは、二つの標準正規分布にしたがう変数の分散の比がしたがう確率分布。



(2) F 値 F value

これは、比 (割り算) の形で、標準正規分布に従う二つのグループから得られた二つの分散の違いを表した統計量。





全知全能性と F 値

① 全知全能の視点

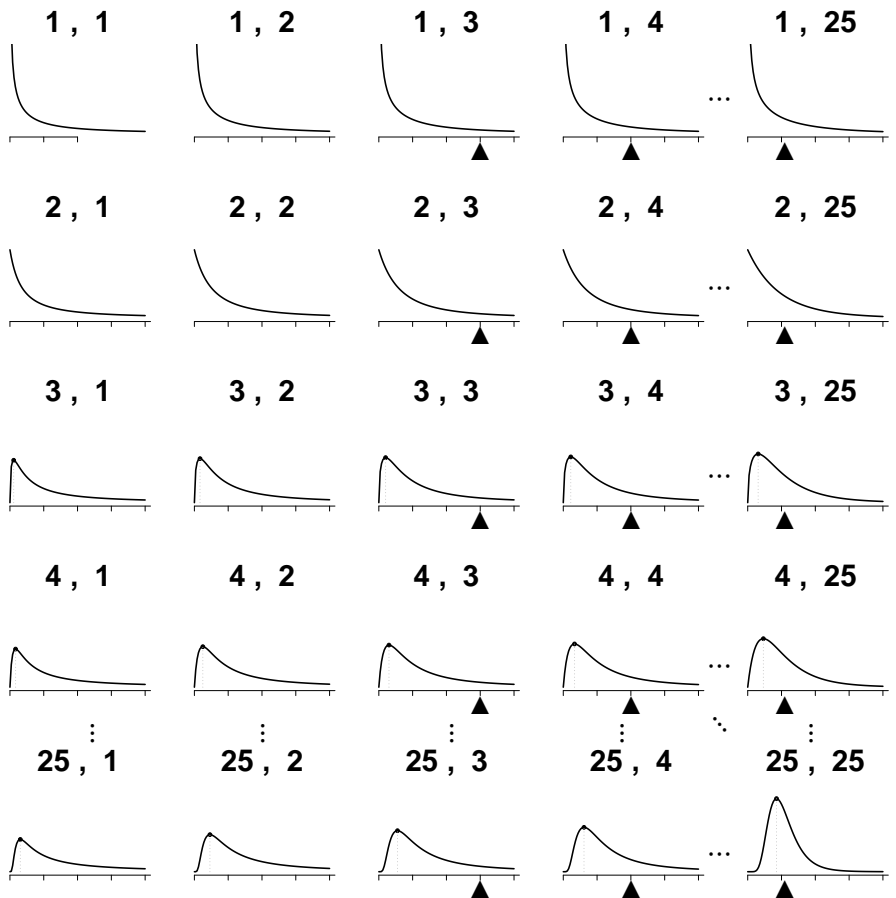
$$F = \frac{\frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{y_{0i} - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2}{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{y_{1i} - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2} \sim F(n_0, n_1)$$

② 非全知全能の視点

$$F = \frac{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{y_{0i} - \bar{y}_0}{\sigma_0} \right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{y_{1i} - \bar{y}_1}{\sigma_1} \right)^2} \sim F(n_0 - 1, n_1 - 1)$$



F 分布と自由度





等分散性が成り立つときの標本分布

「 H_0 : 分散等質性の仮定 ($\sigma^2 = \sigma_0^2 = \sigma_1^2$)」のもとでは、

① 全知全能の視点

$$F = \frac{\frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{y_{0i} - \mu_0}{\sigma} \right)^2}{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{y_{1i} - \mu_1}{\sigma} \right)^2} \sim F(n_0, n_1)$$

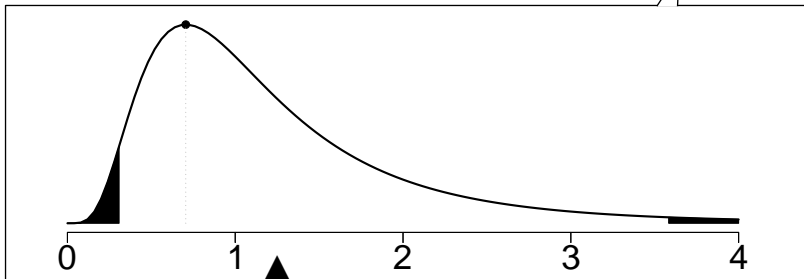
$$= \frac{\frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} (y_{0i} - \mu_0)^2}{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (y_{1i} - \mu_1)^2} \sim F(n_0, n_1)$$

② 非全知全能の視点

$$F = \frac{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{y_{0i} - \bar{y}_0}{\sigma} \right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{y_{1i} - \bar{y}_1}{\sigma} \right)^2} \sim F(n_0 - 1, n_1 - 1)$$

$$= \frac{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} (y_{0i} - \bar{y}_0)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (y_{1i} - \bar{y}_1)^2}$$

$$= \frac{s_0^2}{s_1^2} \sim F(n_0 - 1, n_1 - 1)$$

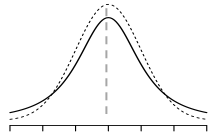




分布間の関係

t 分布 $t(n-1)$

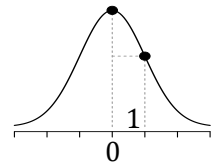
$$t_i = \frac{y_i - \mu}{\hat{\sigma}}$$



⇒
近似

標準正規分布 $N(0, 1)$

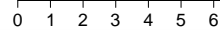
$$z_i = \frac{y_i - \mu}{\sigma}$$



二乗 ↓

χ^2 分布 $\chi^2(1)$

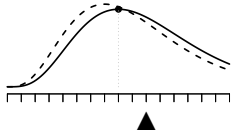
$$\chi^2 = \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$



再生性 ↓

χ^2 分布 $\chi^2(n-1)$

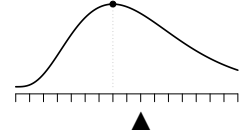
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma}\right)^2$$



⇒
近似

χ^2 分布 $\chi^2(n)$

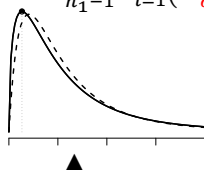
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$



比 ↓

F 分布 $F(n_0-1, n_1-1)$

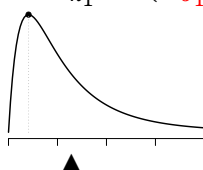
$$F = \frac{\frac{1}{n_0-1} \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{y_{0i} - \bar{y}_0}{\sigma_0}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{y_{1i} - \bar{y}_1}{\sigma_1}\right)^2}$$



⇒
近似

F 分布 $F(n_0, n_1)$

$$F = \frac{\frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{y_{0i} - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2}{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{y_{1i} - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2}$$



(1) 目的

母集団の $\mu_1 - \mu_0$ に対する幅を持たせた推論をしたい。

(2) 考え方

「 t 値 が 受容域 に 入る確率」は 95%

(3) 読み方

$$95\% \text{信頼区間} = [-4.28, \quad 0.28]$$

※よくある間違い

95%信頼区間とは、

「この区間が真の $\mu_1 - \mu_0$ を含む相対頻度が 95%であるということ」

であり、

「母集団の $\mu_1 - \mu_0$ がこの間の値を取る確率が 95%である」という意味ではない！

(4) 図



確認問題：サンプルサイズと p 値の落とし穴

英語の教授法 A と B の効果を調べるために、調査を行った。集めた実験協力者を無作為に半分に分け、一方に教授法 A、残り半分に教授法 B を採用した授業を受けてもらった。この実験協力者に共通のテスト (100 点満点) を受けてもらった。ここから教授法 A を受けた人と教授法 B を受けた人という二つの母集団の英語成績の母集団平均値に差があるのかどうかを検証するために、対応のない t 検定を行った (両側検定)。

(1) 実験協力者が 6 人のとき、次の結果を得た。

- ① t 値 : 0.41
- ② p 値 : 0.70
- ③ 95%信頼区間 : CI (-17.3, 23.3)

問 1 α 水準が 0.01% であるとき帰無仮説を棄却できるか。

問 2 実質的に二つのグループには差があると言えるか。

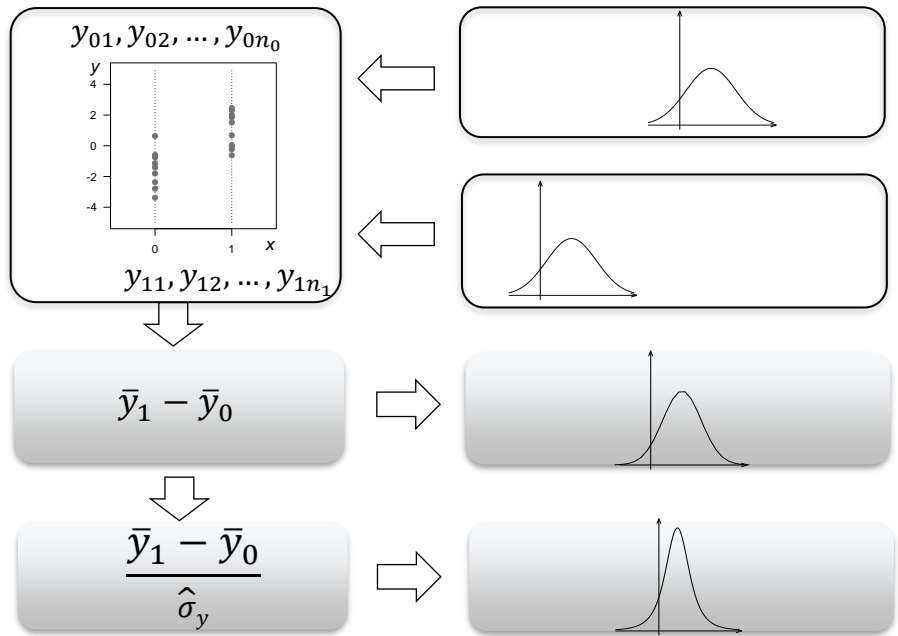
(2) 実験協力者が 6,000 人のとき、次の結果を得た。

- ① t 値 : 5.09
- ② p 値 : 0.0000003717
- ③ 95%信頼区間 : CI (0.79, 1.79)

問 1 α 水準が 0.01% であるとき帰無仮説を棄却できるか。

問 2 実質的に二つのグループには差があると言えるか。

問 3 問 1 と問 2 に一見食い違いが見られるのはなぜか。



(1) 母集団の効果量：母集団標準化平均値差 δ

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$$

(2) 母集団効果量の点推定

母集団の標準化平均値差の点推定値として標本標準化平均値差 d が用いられる。

$$\hat{\delta} = d = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\hat{\sigma}}$$

(3) 母集団効果量の区間推定

サンプルサイズが大きい時 d の標本分布が正規分布となることを利用すると、 δ の 95% 信頼区間は次のようになる。

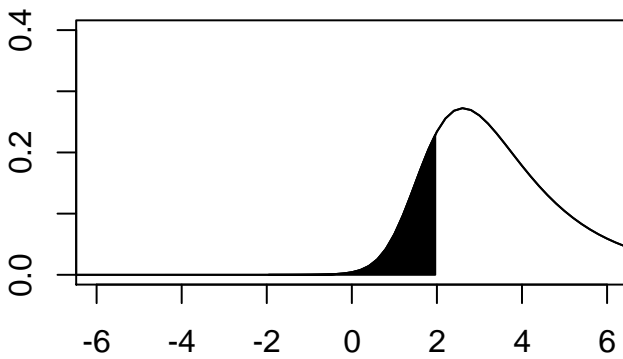
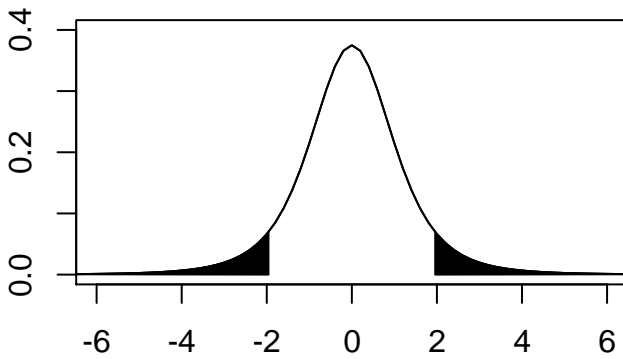
$$\hat{\sigma}_d = \sqrt{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1} + \frac{d^2}{2(n_0 + n_1 - 2)}}$$

補足：効果量を用いたサンプルサイズの決定

(1) サンプルサイズの決定

次の四つは、三つが決まると残り一つが決まる関係にある。

- ①第一種の過誤の確率 (α)、
- ②第二種の過誤の確率 (β)、
- ③想定される母集団効果量 (δ)
- ④サンプルサイズ (n)



(2) 実践上の手続き

① 表：標本数を決める表は数多く発表されている。

例： $\alpha = 0.05$ 、検定力 $1 - \beta = 0.8$ の平均値の差の検定

	$\delta = 0.2$	$\delta = 0.5$	$\delta = 0.8$
標本数	394	64	26

② 統計ソフト：

- ・ R のような統計ソフトでは、簡単に計算してくれる (pwr ライブラリの `power.t.test`)。
- ・ 検定力関係では、G*Power も有名。

```
> library(pwr)
```

```
> pwr.t.test(d = 0.5, sig.level = 0.05, power = 0.8)
```

```
Two-sample t test power calculation
```

```
      n = 63.76561
```

```
      d = 0.5
```

```
sig.level = 0.05
```

```
power = 0.8
```

```
alternative = two.sided
```

```
NOTE: n is number in *each* group
```

```
> pwr.t.test(n = 3000, sig.level = 0.05, power = 0.8)
```

```
Two-sample t test power calculation
```

```
      n = 3000
```

```
      d = 0.07236001
```

```
sig.level = 0.05
```

```
power = 0.8
```

```
alternative = two.sided
```

```
NOTE: n is number in *each* group
```