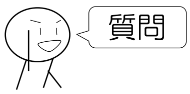
## 📖 増補：†共分散分析　ANCOVA




私の実験、各水準に被験者をランダムに割り当てられないんです！

「英会話スクールに通ったかどうか」を要因にしたいのだけど、「親の熱意」に関して無頓着となるように被験者をランダムに割り当てるのは難しい。こういうときは統制の一つの手段として「親の熱意」も変数としてモデルに取り込む方法がある。

（1）例：英語教育

小学校時代の英会話スクールへの通学が、中学校の英語のテストの成績に影響を与えているか？

モデル１

従属変数　：中学の共通テストの英語の成績
独立変数 1　：英会話スクールの有無
（要因）　（通った　vs. 通わなかった）

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

モデル１の問題

「英会話スクールの有無」ではなくて、「親の教育への熱心さ」も影響を与えているのではないの？

⇒　モデル 1 では原因が交絡し、わからない。

モデル２

「親の教育への熱心さ」を測定し、分散分析モデルに取り込む！

独立変数 2　：親の教育への熱心さ
（通った　vs. 通わなかった）

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta w_i + \varepsilon_{ij}$$

## （２）共分散分析 Analysis of Covariance

① 共変量／共変数 covariate
これは、モデルに組み入れられた要因のほかに観測値に影響を与える変数のこと。

② 共分散分析
これは、共変量と呼ばれる量的な変数をモデルに投入することで、残差を減らし、検定力を高める統計分析。

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta w_i + \varepsilon_{ij}$$

⇒ 結局は特殊な場合の 重回帰モデル に相当する。

☞ ポイント：$\beta$に添え字の $j$がない！

これは添え字 $j$（つまりグループ）によらず共変量が従属変数の予測に与える影響は一定だという仮定を表す。

⇒ すべてのグループが同じ傾きを持つということ。

③ 「回帰係数の等質性の仮定」の検定
グループごとの傾きは$\delta_j$だけ違うという下のモデルを立て「$\delta_j$が全て０である」という帰無仮説を検討。

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + (\beta + \delta_j)(x_{ij} - \bar{x}) + \varepsilon_{ij}$$

☞ ポイント：棄却できないことを願う変則的な検定

有意でない（帰無仮説を保持することになった場合）に、②の共分散分析のモデルを利用することになる。

※$\delta_j$の意味
独立変数１と共変数（独立変数２）に影響があることを表す、独立変数１と２の交互作用を表している。

⇒ $\delta_j$は固定効果として扱われる点でランダム係数モデルとは異なる。

P 復習：分散の分解

(1) AとBが独立ではない

$S^2_{A+B} = S^2_A + 2S_AS_B + S^2_B$

(2) AとBが独立

$S^2_{A+B} = S^2_A + S^2_B$

## 📖 ノート３ 分析の評価１：作った統計モデルの正確さを評価

（参照：第５講ノート４）

**フェーズ５：分散分析**

**手順１**：平方和を分解する

（例１）$ss_y = ss_A + ss_e$ 一元配置

（例２）$ss_y = ss_A + ss_B + ss_{A\times B} + ss_e$ 二元配置

手順２：残差平方和$ss_e$に比して独立変数の平方和（$ss_A$，$ss_B$，$ss_{A\times B}$）が大きいと言えるかＦ検定する

### （１）回帰分析における平方和の分解

① 単回帰分析

ここを $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i}$ で推定

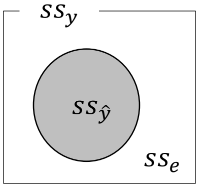
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

| | 平方和 | 自由度 | 平均平方和 | F |
|---|---|---|---|---|
| 予測値 → $\hat{y}$ | $ss_{\hat{y}}$ ÷ | 1 = | $MS_{\hat{y}}$ | 比 $MS_{\hat{y}}/MS_e$ |
| 残差 → $e$ | $ss_e$ ÷ | $n-1-1$ = | $MS_e$ | |
| 観測値 → $y$ | $ss_y$ | $n-1$ | | |

$$ss_y = ss_{\hat{y}} + ss_e$$

注 $\hat{y}$とeが無相関なので分解できる!




P 決定係数

$R^2 = \dfrac{SS_{\hat{y}}}{SS_y} = 1 - \dfrac{SS_e}{SS_y}$

$= \dfrac{黄身}{フライパン} = 1 - \dfrac{白身}{フライ}$

② 重回帰分析

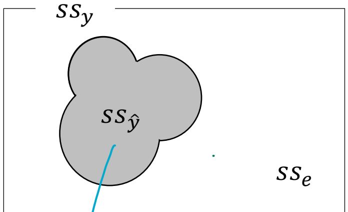
この部分を $\hat{y}$で推定

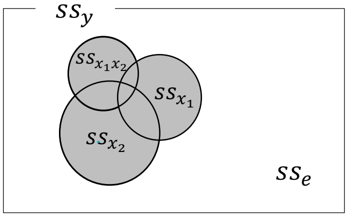
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

| | 平方和 | 自由度 | 平均平方和 | F |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{y}$ | $ss_{\hat{y}}$ | $p$ | $MS_{\hat{y}}$ | $MS_{\hat{y}}/MS_e$ |
| $e$ | $ss_e$ | $n-1-p$ | $MS_e$ | |
| $y$ | $ss_y$ | $n-1$ | | |

$$ss_y = ss_{\hat{y}} + ss_e \qquad ss_y \neq ss_A + ss_B + ss_{AB} + ss_e$$




$SS_{\hat{y}}$をさらに、$\hat{y}$を構成する$x_1$や$x_2$で分解できるのかというと、できない

P 例外的に分解できる時

独立変数同士$x_1, x_2\cdots$たちが全て無相関なら、

$SS_{\hat{y}} = SS_{x_1} + SS_{x_2} + \cdots + SS_{x_p}$

というように分解できる。

（多重共線性が完全に0）

⇒現実的にほとんどない。

## （２）分散分析における平方和の分解

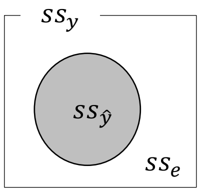
### ① 一元配置分散分析

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

| | 平方和 | 自由度 | 平均平方和 | F |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{y}$ | $ss_{\hat{y}}$ | $J-1$ | $MS_{\hat{y}}$ | $MS_{\hat{y}}/MS_e$ |
| $e$ | $ss_e$ | $n-J$ | $MS_e$ | |
| $y$ | $ss_y$ | $n-1$ | | |

$$ss_y = ss_{\hat{y}} + ss_e$$




### ② 二元配置分散分析（バランスデザイン）

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \alpha\beta_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

分散分析表

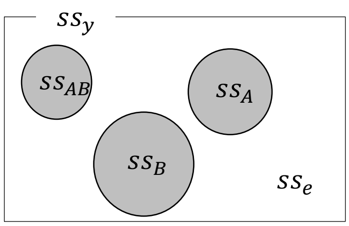
もともと$\hat{y}$だった部分をさらに分解した!

| | 平方和 | 自由度 | 平均平方和 | F |
|---|---|---|---|---|
| 要因$A$ | $ss_A$ | $J-1$ | $MS_A$ | $MS_A/MS_e$ |
| 要因$B$ | $ss_B$ | $K-1$ | $MS_B$ | $MS_B/MS_e$ |
| 交互作用 | $ss_{AB}$ | $(J-1)(K-1)$ | $MS_{AB}$ | $MS_{AB}/MS_e$ |
| $e$ | $ss_e$ | $n-JK$ | $MS_e$ | |
| $y$ | $ss_y$ | $n-1$ | | |

比

今までは ここどまりだった式が、バランスデザインのときは、この式へとさらに展開される!

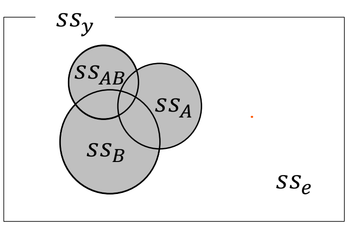
$$\begin{aligned} ss_y &= ss_{\hat{y}} + ss_e \\ &= ss_A + ss_B + ss_{AB} + ss_e \end{aligned}$$




※アンバランスデザインでは平方和の分解は不成立！

$$ss_y \neq ss_A + ss_B + ss_{AB} + ss_e$$

ふつうの重回帰モデルと同じ状況が存在する!



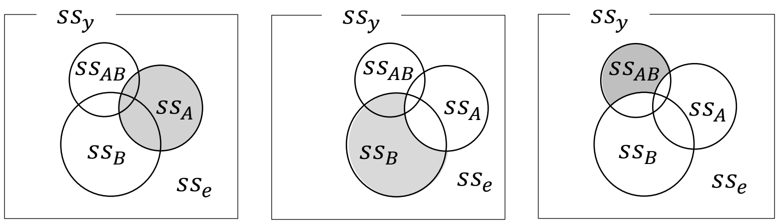
## （３）平方和の種類

### ① タイプⅠの平方和

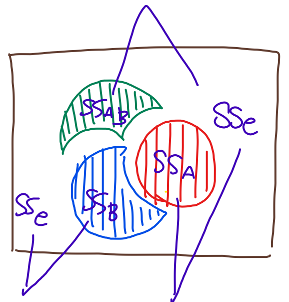
各独立変数（要因）の平方和を、モデルに組み込んだ順に評価するもの。

ⓅタイプⅠの平方和

要因 A ←非対称→ 要因 B　　交互作用 AB




$SS_{AB}$ と $SS_e$ を比較



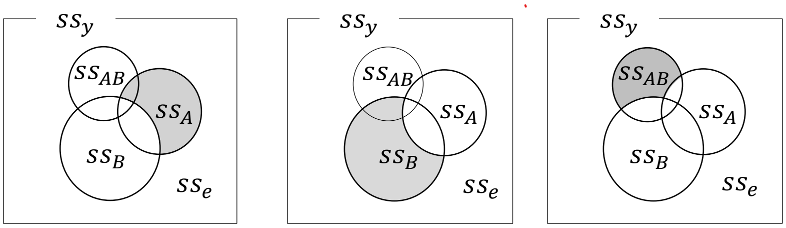

$SS_B$ と $SS_e$ を比較
$SS_A$ と $SS_e$ を比較

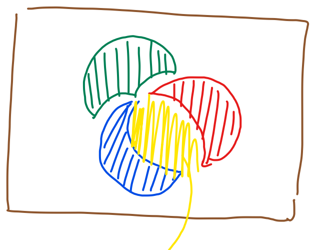
### ② タイプⅡの平方和

その独立変数（要因）でしか説明できない部分を、その変数の平方和と考えるもの。

ⓅタイプⅡの平方和

要因 A ←対等→ 要因 B　　交互作用 AB



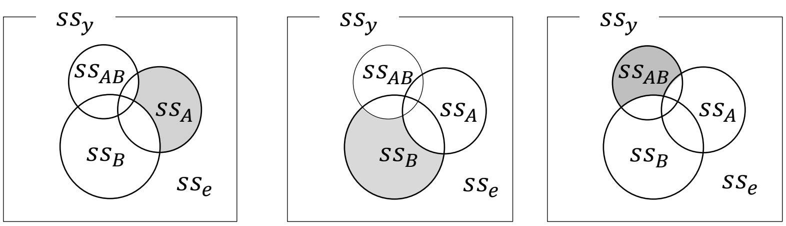
無視

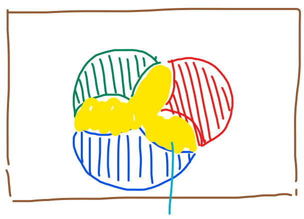
### ③ タイプⅢの平方和

その独立変数（要因）でしか説明できない部分を、その変数の平方和と考えるもの。

要因 A　　要因 B　　交互作用 AB

ⓅタイプⅢの平方和



無視

Ⓟギリシア文字 η

η：エータ

（4）重相関係数と相関比

① 重相関係数 $R$ Multiple correlation coefficient

これは実測値 $y$ と 予測値 $\hat{y}$ の相関係数であり $R$ と表す。

$$R = r_{y\hat{y}}$$

② 相関比 $\eta$ Correlation ratio

これは実測値 $y$ と 予測値 $\hat{y}$ の相関係数であり ~~$R$~~ η と表す。

$$\eta = r_{y\hat{y}} = R$$

※ 分散分析では R の代わりに $\eta$ と書く慣習がある。

⇒ 慣習的な違い！本質的な違いはない！

（5）決定係数 Coefficient of determination

これは独立変数がどれだけ従属変数の値を決定するかを示す指標。別名：分散説明率 Proportion of variance accounted for

① $R^2$ を用いた表記

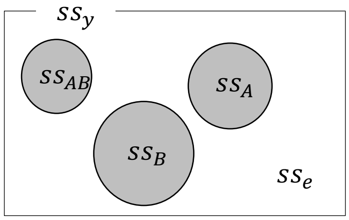
$$R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_e^2}{s_y^2}$$

② $\eta^2$ を用いた表記

$$\eta^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_e^2}{s_y^2}$$

$$ss_y = ss_{\hat{y}} + ss_e$$

$$= ss_A + ss_B + ss_{AB} + ss_e$$




※ 分散分析では R の代わりに $\eta^2$ と書く慣習がある。

## 📖 ノート４　分析の評価２：係数の推定値の正確さの評価

保持
or
棄却

**フェーズ５：分散分析**

手順１：平方和を分解する

（例１）$ss_y = ss_A + ss_e$　　一元配置

（例２）$ss_y = ss_A + ss_B + ss_{A\times B} + ss_e$　　二元配置

手順２：残差平方和$ss_e$に比して独立変数の平方和（$ss_A$，$ss_B$，$ss_{A\times B}$）が大きいと言えるかＦ検定する

⇒ 二値的な議論
(＝検定)

ステップ１
全体の検定
（F 検定）
⇒
ステップ２ → 増補
個別の検定
（t 検定）

**フェーズ６：パラメータへの統計的推測・評価**

手順１：検討対象の要因における各水準の母平均を推測

手順２：検討対象の要因における水準間の差を推測

※点推定・信頼区間・予測区間などの検討

⇒ 数値的推論
(＝効果量、
信頼区間)

### （１）検定１：「全体」の検定　$\boxed{\text{ステップ１}}$

バランスデザインの二元配置分散分析を例に概観する。

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

① 帰無仮説と対立仮説

■ 要因 A の主効果に関する仮説

H0：「$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_J = 0$（すべての係数が０）」

H1：「$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_J$の少なくとも一つはゼロではない」

この段階で「α3が異常だ」のようなギロンはしない

■ 要因 B の主効果に関する仮説

H0：「$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_K = 0$（すべての係数が０）」

H1：「$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$の少なくとも一つはゼロではない」

■ 交互作用効果に関する仮説

H0：「$(\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \cdots = (\alpha\beta)_{JK} = 0$」

H1：「少なくとも一つの$(\alpha\beta)_{jk}$はゼロではない」

## Ⓟ 平均平方和

① 標本分散

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \times SS_y$$

yの平方和

② 不偏分散

$$S_y'^2 = \frac{1}{n-1} \times SS_y$$

③ 平均平方和

$$MS_y = \frac{1}{\text{自由度}} \times SS_y$$

⇒ ①〜③の全て、平方和($SS_y$)を何かで割っている。

∴ 不偏分散であれ、平均平方和であれ、標本分散を調整した量だと考えることができる!

## Ⓟ F値

$$F = \frac{\text{修正された分散①}}{\text{修正された分散②}}$$

② 検定統計量 F

☞ F 値（要因 A の検定における検定統計量）

$$F_A = \frac{ss_A/(J-1)\ \text{「要因 A の水準}\hat{y}_{j\cdot}\text{のばらつき」}}{ss_e/JK(I-1)\ \text{「}y_{ijk}\text{の}\hat{y}_{ijk}\text{からのばらつき」}}$$

$$\mathrm{ss_A} = KI\sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_{j\cdot} - \bar{y})^2 \quad \mathrm{ss}_e = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{ijk} - \bar{y}_{jk})^2$$

☞ F 値（要因 B の検定における検定統計量）

$$F_B = \frac{ss_B/(K-1)\ \text{「要因 B の水準}\hat{y}_{\cdot k}\text{のばらつき」}}{ss_e/JK(I-1)\ \text{「}y_{ijk}\text{の}\hat{y}_{ijk}\text{からのばらつき」}}$$

$$\mathrm{ss_B} = JI\sum_{k=1}^{K}(\bar{y}_{\cdot k} - \bar{y})^2$$

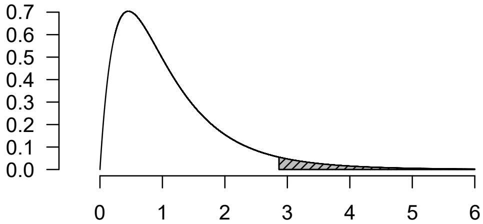
☞ F 値（交互作用の検定における検定統計量）

$$F_{\mathrm{A\times B}} = \frac{ss_{A\times B}/(J-1)(K-1)\ \text{「交互作用のばらつき」}}{ss_e/JK(r-1)\ \text{「}y_{ijk}\text{の}\hat{y}_{\mathrm{ijk}}\text{からのばらつき」}}$$

$$\mathrm{ss_{A\times B}} = I\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(\bar{y}_{jk} - \bar{y}_{j\cdot} - \bar{y}_{\cdot k} + \bar{y})^2$$

③ F 分布

H0 が真なら F 値は F 分布に従う。




④ 分散分析表

| | 平方和 | 自由度 | 平均平方和 | F 値 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 要因 A | $ss_A$ ÷ | $J-1$ = | $MS_A = \frac{ss_A}{J-1}$ → | $F = \frac{MS_A}{MS_e}$ | *** |
| 要因 B | $ss_B$ | $K-1$ | $MS_B = \frac{ss_B}{K-1}$ | $F = \frac{MS_B}{MS_e}$ | * |
| 交互作用 | $ss_{A\times B}$ | $(J-1)(K-1)$ | $MS_{A\times B} = \frac{ss_{A\times B}}{(J-1)(K-1)}$ | $F = \frac{MS_{A\times B}}{MS_e}$ | |
| 残差 | $ss_e$ ÷ | $JK(I-1)$ = | $MS_e = \frac{ss_e}{JK(I-1)}$ | | |
| 全体 | $ss_y$ | $n-1$ | $MS_y = \frac{ss_y}{n-1}$ | | |

（２）検定２：「個別」の回帰係数の検定 $\boxed{\text{ステップ2}}$

Ⓟ 個別の検定

(例) $\hat{\alpha}_2$ ＊＊＊
$\hat{\alpha}_3$ ＊
$\hat{\alpha}_4$

⇒ $\hat{\alpha}_2$ と $\hat{\alpha}_3$ には注目する価値がある など

① 帰無仮説と対立仮説

H0：$\beta_2 = 0$

H1：$\beta_2 \neq 0$

② 検定統計量 t

☞ t 値（水準の検定における検定統計量）

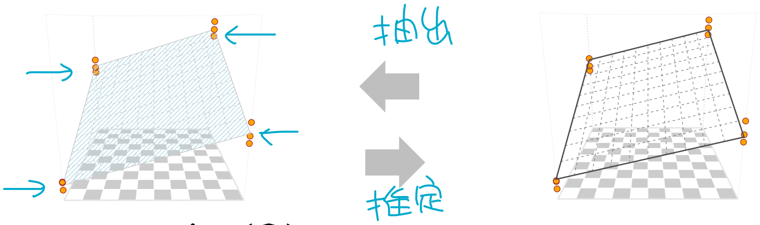
$$t = \frac{\hat{\beta}_i \text{「}\beta_i\text{の推定値」}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i} \text{「}\beta_i\text{の推定値」の標準誤差の推定値}}$$

| | 点推定値 | 標準誤差 | t value | Pr(>\|t\|) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\mu}$ | -5.03 | 0.29 | -16.9 | 2e-16 | *** |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.47 | 0.04 | 11.18 | 1.93e-14 | *** |
| $\hat{\beta}_2$ | 0.99 | 0.04 | 23.48 | 2e-16 | *** |
| $\widehat{\alpha\beta}_{22}$ | 0.00 | 0.01 | 1.50 | 0.14 | |

F-statistic: 36.57 on 3 and 98 DF, p-value: 6.032e-16

（３）予測値（グループ平均）の点推定

母集団モデルが正しいという仮定の下、最小二乗法を用いて行った点推定の結果は次のように与えられる。




$$y_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_j + \hat{\beta}_k + \left(\widehat{\alpha\beta}\right)_{jk} + e_{ijk} \qquad y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\left(\widehat{\alpha\beta}\right)_{jk} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot k} + \bar{y}_{\cdots}$$

$$\hat{\beta}_k = \bar{y}_{\cdot\cdot k} - y_{\cdots}$$

$$\hat{\alpha}_j = \bar{y}_{\cdot j\cdot} - y_{\cdots}$$

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{\cdots}$$

$$\hat{\mu}_{jk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_j + \hat{\beta}_k$$

$$= \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot k} - y_{\cdots}$$

（4）予測値（グループ平均）の信頼区間

標本を繰り返し抽出した時、この範囲を設けておけば 100 回に 95 回、真の$\mu_{jk}$ を含むだろう、という区間。

$$\left[\hat{\mu}_{jk} - t_c \times \sqrt{\frac{1}{n_e}\sigma^2},\quad \hat{\mu}_{jk} + t_c \times \sqrt{\frac{1}{n_e}\sigma^2}\right]$$

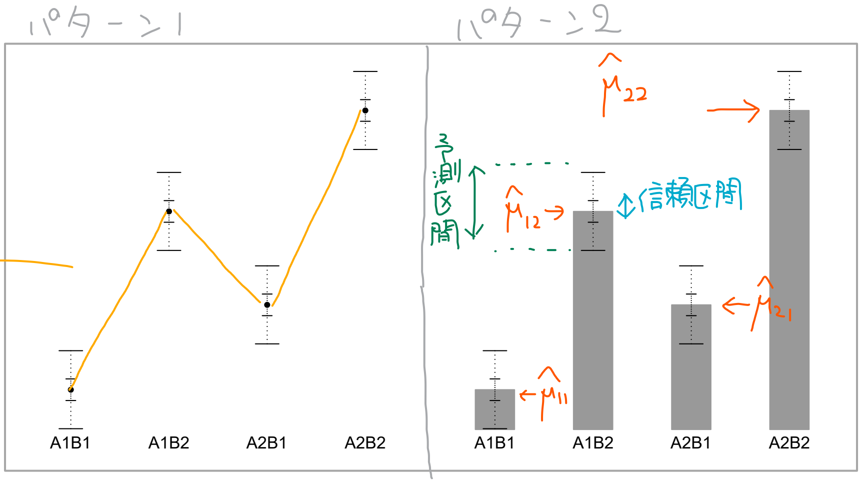
（5）データの 95%予測区間

将来データを採っても、この範囲を設けておけば 100 回に 95 回データを含むだろう、という区間。

$$\left[\hat{\mu}_{jk} - t_c \times \sqrt{\left(1+\frac{1}{n_e}\right)\sigma^2},\quad \hat{\mu}_{jk} + t_c \times \sqrt{\left(1+\frac{1}{n_e}\right)\sigma^2}\right]$$

※$n_e$は反復有効数と呼ばれ、伊奈の式／田口の式で求める。

（6）結果の図示（信頼区間と予測区間）

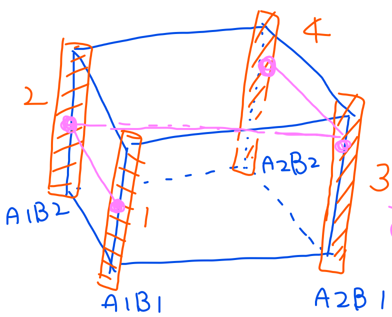



Ⓟ折れ線

線でつなぐ人もいる。

(1)

(2)　右下に！




時系列データではないので、
折れ線グラフのように解釈はしないでネ。

※論文によっては信頼区間だけ表示している場合もある。

**Rでの実装**

長畑秀和 (2016)『R で学ぶ実験計画法』東京：朝倉書店に様々ケースのとても実践的なコードが存在する。

## 📖 増補１：多重比較

Ⓟ第1種の過誤

### （１）多重比較の問題

① 多重比較

分散分析で有意差が見つかった要因に対し二群の差の検定を各水準の組み合わせに対し何度も検討すること。

| 真実＼判断 | H0 | H1 |
| --- | --- | --- |
| H0 | ○ | 第1種誤 |
| H1 | 第2種の誤り | ○ |

② 多重比較の問題（多重性）

同じデータに対して検定を繰り返すことで、第一種の過誤の確率が上がってしまう。

☞ <u>第一種の過誤を犯す確率</u>

「$k$ 回中少なくとも一回は第一種の過誤を犯す確率」

$= 1 -$「$k$ 回中一回も第一種の過誤を犯さない確率」

$$= 1 - (1 - \alpha)^k$$

(例) 6回検定

要因A : α% ⎫
要因B : α% ⎬ F検定
AB : α% ⎭

要因A (水準2) α% ⎫
要因B (水準2) α% ⎬ t検定
AB α% ⎭

① 1回だけ
(1-α)%でクリア

② 2回だけ
$(1-\alpha)^2$%でクリア

⑥ 6回だけ
$(1-\alpha)^6$%でクリア

※ $\alpha = 0.05$
$1-\alpha = 0.95$
$(1-\alpha)^6 = 0.735\ldots$

例：1 要因（3 水準）

水準１

水準２　　水準３

⇒ t検定だけど3回も実施

③ 多重比較法（多重比較検定）の系統

多重比較法
- 分布調整型
  - t 分布や F 分布の代わりに第一種の過誤に強い分布を採用
  - （例１）Tukey の方法
  - （例２）Hochberg の方法
  - （例３）Gabriel の方法
  - （例４）Dunnett の方法
- 統計量調整型
  - （例）　Scheffe の方法
- 有意水準調整型
  - （例１）Bonferroni の方法
  - （例２）Holm の方法
  - （例３）Sidak の方法
  - （例４）P-E-G-W の方法
  - （例５）Tamhane の方法

## （２）有意水準調整型

### ■ ボンフェロニ（Bonferroni）の方法

① 方法

検定「全体」の第一種の過誤を犯す確率を$\alpha$とするとき
個々の検定の有意水準を $\frac{\alpha}{k}$ にする。

② 利点
（利点１） 各検定が独立でない場合にも利用可能
（利点２） 正規分布以外の分布でも利用可能

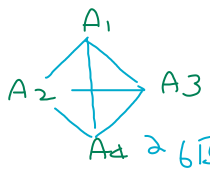
③ 欠点
$k$が大きくなると検出力が落ちてしまう。

検出力の向上

### ■ ホルム（Holm）の方法

Ⓟ ホルムの方法

要因AにF(有意!)だとわかった。




と6回調べる.

1 $A_1$と$A_2$ : $p = 0.002 \leftarrow \alpha/6$ *
3 $A_2$と$A_3$ : $p = 0.003 \leftarrow \alpha/4$ *
2 $A_3$と$A_4$ : $p = 0.002 \leftarrow \alpha/5$ *
4 $A_1$と$A_3$ : $p = 0.010 \leftarrow \alpha/3$ *
6 $A_2$と$A_4$ : $p = 0.500$ $\alpha$
5 $A_4$と$A_1$ : $p = 0.020 \leftarrow \alpha/2$ *

$\alpha = 0.05$

① 方法

(Step 1) $k$個の各検定を$p$値が小さい順に並べる。

(Step 2) $i$番目の検定の有意水準を$\frac{\alpha}{k-i+1}$ とする。

(Step 3) 頭から順番に検定を行い、$m$番目で初めて H0 が「保持」されたとする。このとき、

(i) 1番目から$m-1$番目までの検定の H0 を「棄却」

(ii) $m$番目からの k 個の各検定は H0 を「保持」する

② 利点

（利点１） 各検定が独立でない場合にも利用可能

（利点２） 正規分布以外の分布でも利用可能

（利点３） ボンフェロニよりも検出力が高い。

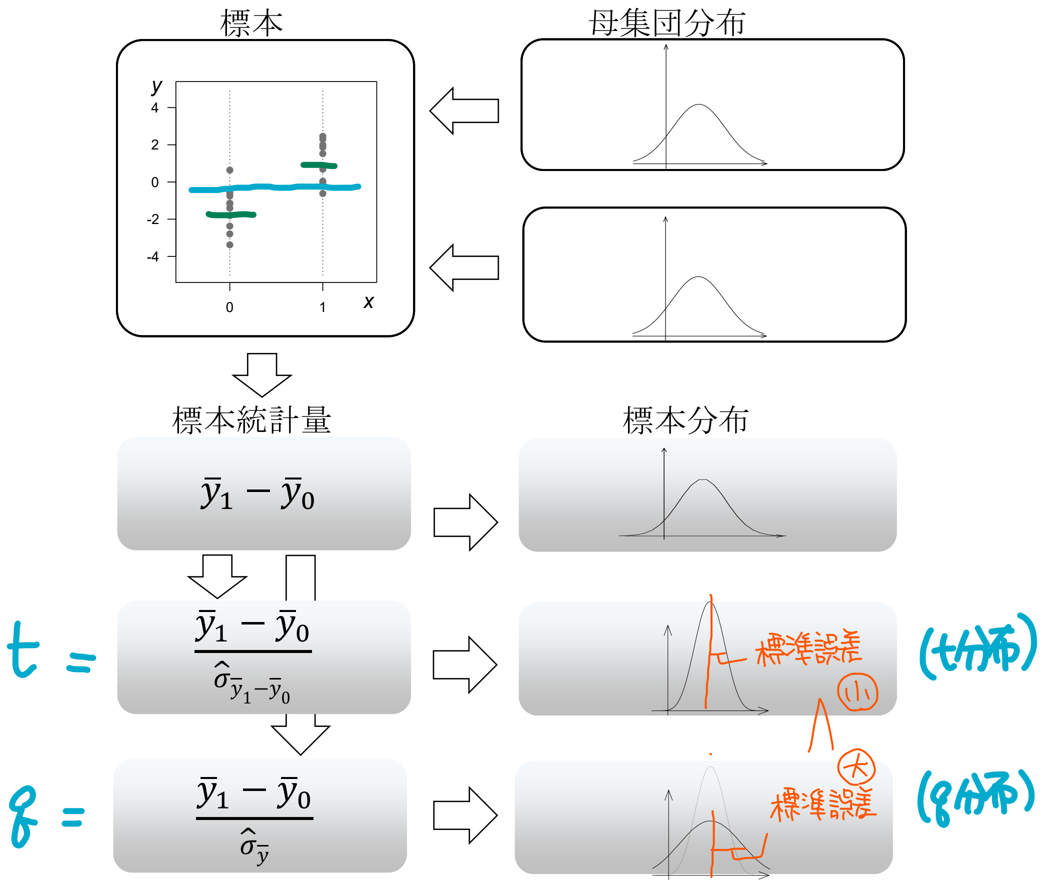
（3）分布調整型

■ テューキー（Tukey）の方法

① 方法

t 値を修正した q 値を用いて多重比較を行う。

$$t = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\hat{\sigma}_{\bar{y}_i - \bar{y}_j}} \qquad q = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\hat{\sigma}_{\bar{y}}}$$




② 利点

t 分布に比べ、検定を繰り返しても棄却されにくい分布。

③ 欠点

（欠点１）バランスデータにしか使えない。

※ アンバランスなデータに適用できるように改良された Tukey-Kramer の方法というものもある。

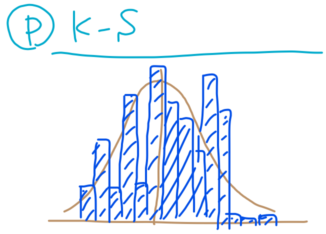
（欠点２）対応のない分析にしか使えない。

## 📖 ノート５分析の評価３：想定した統計モデルの適切さの評価

（参照：第 5 講ノート 6）

（１）†正規性の仮定の検証

H0：母集団分布が正規分布だ
H1：「母集団分布が正規分布だ」は偽




① コロモゴロフ＝スミルノフ（K-S）の検定
理論的な正規分布と、観測データのヒストグラムを比べて、両者の差を比較して H0 の妥当性を考える方法。
② シャピロ＝ウィルク（Shapiro-Wilk） の検定
ケース数が少ない場合に利用される。

（２）†等分散性の仮定の検証

H0：全ての水準の分散は等しい
H1：「全ての水準の分散は等しい」は偽

① バートレット（Bartlett）の検定
ルビーンの検定と比べ、正規分布／それに正規分布の標本の等分散性の検定での検出に優れるとされる。

② ルビーン（Levene）の検定
バートレットの検定よりもよく用いられる。

※あまり使われない
極端にサンプルサイズが少ないとき（例：25 個以下など）にのみに検討するのが普通。
（理由１）分散分析は正規性・等分散性に頑健。
（理由２）検定の多重性の問題を招く。
（理由３）棄却されないことを願う奇妙な検定。

SPSS コミュニティでの使用が多い。詳しい説明が欲しい場合 SPSS のマニュアルを見るといい。

https://www.spss-tutorials.com/

## （３）検定に基づく変数選択

分散分析では第 5 章で見たモデル選択手法が一般的に使われるように前から「検定による変数選択」が使われていた。

モデル選択
- 情報量基準
- クロスバリデーション
- （ラッソ回帰）
- （検定による変数選択）

Ⓟ ネストしていないとき

・ネスト (nest)

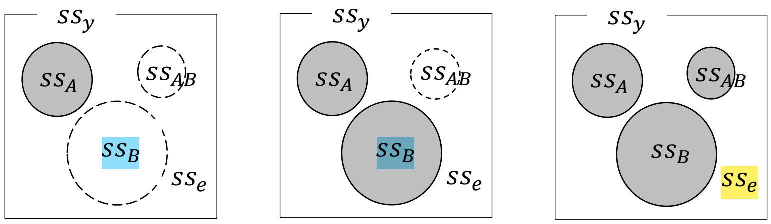
「あるモデル1とモデル2があり、
モデル1の独立変数が
全てモデル2に入っているとき、
モデル2はモデル1を
ネストする」といいます

(例1) M1： $x_1$
○ M2： $x_1$ $x_2$

(例2) M1： $x_1$
× M2： $x_2$

### ① 基本的なアイデア

新しく変数を増やした時の**決定係数の増加量**に注目。




モデル１　　モデル２　　モデル３

### ② 帰無仮説と対立仮説

$q$個の独立変数からなるモデルに新たに$p-q$個変数を加え、全部で$p$個の独立変数を持つモデルを作るとき：

H0:前者の決定係数$R^2_{y\cdot 1\cdots q}$と後者の決定係数に差がない。

H1: H0 は成り立たない。

### ③ 検定統計量 F

決定係数の増加量を次の検定統計量の増加で調べる。

$$F=\frac{\left(R^2_{y\cdot 1\cdots p}-R^2_{y\cdot 1\cdots q}\right)/\,(p-q)}{\left(1-R^2_{y\cdot 1\cdots p}\right)/\,(n-p-1)}$$

| | 残差自由度 | 残差平方和 | 自由度 | 平方和 | F | Pr(>F) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M1 | 46 | 1182.8 | | | | |
| M2 | 45 | 39.6 | 1 | 1143.1 | 1295.0 | <2e-16 |
| M3 | 44 | 38.8 | 1 | 0.84 | 0.9 | 0.3348 |

### ④ 弱点

（問題点１）検定の多重性の問題

（問題点２）ネストしているモデルしか使えない。

## 資料

### 資料6-1　平方和の分解（バランスデザインの二元配置）

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(y_{ijk}-\bar{y}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(y_{\cdot j\cdot}-\bar{y}\right)^2$$

$$+\sum_{i=1}^{I}\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{\cdot\cdot k}-\bar{y})^2$$

$$+\sum_{i=1}^{I}\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(y_{\cdot jk}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot k}+\bar{y}\right)^2$$

$$+\sum_{i=1}^{I}\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{\cdot jk}\right)^2$$

$$=\underbrace{IK\sum_{j=1}^{J}\hat{\alpha}_j{}^2}_{ss_A}+\underbrace{IJ\sum_{k=1}^{K}\hat{\beta}_i^2}_{ss_B}+\underbrace{I\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\widehat{\alpha\beta}_{jk}^2}_{ss_{AB}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{I}\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}e_{ijk}^2}_{ss_e}$$

$$ss_y=ss_A+ss_B+ss_{AB}+ss_e$$

| | 平方和 | 自由度 | 平均平方和 | F |
|---|---|---|---|---|
| 要因$A$ | $ss_A$ | $J-1$ | $MS_A$ | $MS_A/MS_e$ |
| 要因$B$ | $ss_B$ | $K-1$ | $MS_B$ | $MS_B/MS_e$ |
| 交互作用 | $ss_{AB}$ | $(J-1)(K-1)$ | $MS_{AB}$ | $MS_{AB}/MS_e$ |
| $e$ | $ss_e$ | $N-JK$ | $MS_e$ | |
| $y$ | $ss_y$ | $N-1$ | | |

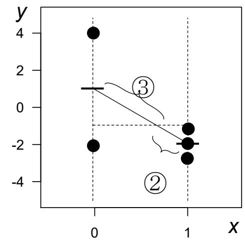
## 資料6-2　　Ｆ値とｔ値の関係

予測値の平方和の自由度が１のとき、すなわち二群の差の検定のとき、$F = t^2$となる。

### （１）全体平均とグループ平均の関係

$\bar{y}_0$と$\bar{y}_1$を$n_1 : n_0$に内分する点が$\bar{y}$となっている。

$$\bar{y} = \frac{n_0}{n_0 + n_1}\,\bar{y}_0 + \frac{n_1}{n_0 + n_1}\,\bar{y}_1$$




### （２）予測値の平方和

$$\begin{aligned}
ss_{\hat{y}} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n_0}(\hat{y}_0 - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n_1}(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 \\
&= n_0(\hat{y}_0 - \bar{y})^2 + n_1(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 \\
&= n_0\left(\hat{y}_0 - \frac{n_0}{n_0+n_1}\,\bar{y}_0 - \frac{n_1}{n_0+n_1}\,\bar{y}_1\right)^2 + n_1(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 \\
&= n_0\left(\frac{n_0+n_1-n_0}{n_0+n_1}\,\bar{y}_0 - \frac{n_1}{n_0+n_1}\,\bar{y}_1\right)^2 + n_1(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 \\
&= n_0\left(\frac{n_1}{n_0+n_1}\,\bar{y}_0 - \frac{n_1}{n_0+n_1}\,\bar{y}_1\right)^2 + n_1(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 \\
&= n_0\left\{\frac{n_1}{n_0+n_1}\,(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)\right\}^2 + n_1(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 \\
&= n_0\left(\frac{n_1}{n_0+n_1}\right)^2 (\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2 + n_1(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 \\
&= \frac{n_0 n_1^2}{(n_0+n_1)^2}\,(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2 + n_1(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 \\
&= \frac{n_0 n_1^2}{(n_0+n_1)^2}\,(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2 + \frac{n_0^2 n_1}{(n_0+n_1)^2}\,(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2 \\
&= \frac{n_0 n_1(n_0+n_1)}{(n_0+n_1)^2}\,(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2 \\
&= \frac{n_0 n_1}{n_0+n_1}\,(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2
\end{aligned}$$

### （３）　残差の平方和

$$\begin{aligned}
ss_e &= \textstyle\sum_{i=1}^{n_0}(\hat{y}_{i0} - \bar{y}_0)^2 + \sum_{i=1}^{n_1}(\hat{y}_{i1} - \bar{y}_1)^2 \\
&= n_0 s_1^2 + n_1 s_1^2
\end{aligned}$$

（４）Ｆ値

これは、平方和を自由度で割ったものの比を表す。

$$F = \frac{\chi_1^2/df_1}{\chi_2^2/df_2}$$

★ 分子の平方和に$ss_{\hat{y}}$を代入（自由度１）

$$F = \frac{ss_{\hat{y}}/1}{\chi_2^2/df_2}$$

★ 分母の平方和に$ss_e$を代入（自由度$n-2$）

$$F = \frac{ss_{\hat{y}}/1}{ss_e/(n-2)}$$

★（２）と（３）の結果を代入

$$F \quad = \frac{\frac{n_0 n_1}{n_0+n_1}(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2}{(n_0 s_1^2 + n_1 s_1^2)/(n-2)}$$

★ $ss_e$を$n-2$で割った分母は不偏分散となっている。これを$s'^2 = \frac{1}{n-2}(n_0 s_1^2 + n_1 s_1^2)$とおく。

$$F \quad = \frac{\frac{n_0 n_1}{n_0+n_1}(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2}{s'^2}$$

$$= \frac{(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2}{s'^2} \times \frac{n_0 n_1}{n_0+n_1}$$

$$= \frac{(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2}{s'^2 \times \left(\frac{n_0 n_1}{n_0+n_1}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{(\bar{y}_0 - \bar{y}_1)^2}{s'^2 \times \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}\right)}$$

★ このルートを取るとｔ値となる。

$$t \quad = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\sqrt{s'^2\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}\right)}} \quad = \sqrt{F}$$

$$= \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{s_{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}}$$

$$= \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\hat{\sigma}^2_{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}}$$

## 資料6-3　乱塊法 Randomized block design

ブロック因子を導入し、ブロックごとで一通りの水準の組み合わせで実験を行い、それをブロックの数繰り返す実験。

① 動機：残差を小さくしたい

② 実験順序

完全にランダムな順序

| 因子 A | ID | | |
|---|---|---|---|
| $A_1$（投与なし） | 2 | 4 | 7 |
| $A_2$（プラセボ） | 1 | 5 | 8 |
| $A_3$（薬 X 投与） | 3 | 10 | 12 |
| $A_4$（薬 Y 投与） | 6 | 9 | 11 |

乱塊法

| 因子 A | ID | | |
|---|---|---|---|
| $A_1$（投与なし） | 2 | 5 | 12 |
| $A_2$（プラセボ） | 1 | 7 | 11 |
| $A_3$（薬 X 投与） | 4 | 6 | 9 |
| $A_4$（薬 Y 投与） | 3 | 8 | 10 |

③ モデル式：

$$y_{ij} = \mu + a_i + r_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$r_j \sim N(0, \sigma_R^2)$$

## 資料6-4　分割法 Split-plot design

これは、多元配置モデルにおいて、無作為化（ランダム化）を段階的に行う方法のこと。

ブロック因子を導入し、ブロックごとで一通りの水準の組み合わせで実験を行い、それをブロックの数繰り返す実験。

① 動機：ランダムな順番で実験を行うことが難しい

② 実験順序

完全にランダムな順序

| 因子 A | ID | | |
|---|---|---|---|
| $A_1$（投与なし） | 2 | 4 | 7 |
| $A_2$（プラセボ） | 1 | 5 | 8 |
| $A_3$（薬 X 投与） | 3 | 10 | 12 |
| $A_4$（薬 Y 投与） | 6 | 9 | 11 |

乱塊法

| 因子 A | ID | | |
|---|---|---|---|
| $A_1$（投与なし） | 2 | 5 | 12 |
| $A_2$（プラセボ） | 1 | 7 | 11 |
| $A_3$（薬 X 投与） | 4 | 6 | 9 |
| $A_4$（薬 Y 投与） | 3 | 8 | 10 |

③ モデル式：

$$y_{ijk} = \mu + a_i + r_k + \varepsilon_{(1)ik} + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{(2)ijk}$$

$$\varepsilon_{(2)ijk} \sim N\left(0, \sigma_{(2)}^2\right)$$

$$\varepsilon_{(1)ij} \sim N\left(0, \sigma_{(1)}^2\right)$$

$$r_j \sim N(0, \sigma_R^2)$$