

線形混合効果モデル（モデル3：ランダム切片①）

例題2

【目標】英語の成績を「現代文の成績」で予測する。ただし、 J 個のクラスに分かれた合計で N 人の生徒たちがおり、全員同じテストを受けている。クラスは、成績別で編成され、英語上級が J_1 クラス、中級が J_2 クラスある ($J = J_1 + J_2$)。「上級クラスか否か」によってどのくらい英語の成績に影響があるのかも調べたい。

【母集団モデル】「現代文の成績」をレベル1の独立変数、「上級クラスか否か」を切片に対するレベル2の独立変数としてモデル化する。

- ・従属変数 y : 英語の点数
- ・独立変数 x_1 : 現代文の点数
- ・独立変数 w_1 : 上級クラスか否か
- ・ y_{ij} は、平均 $\beta_{0j} + \beta_1 x_{1i}$ 分散 σ^2 の正規分布から生まれている。
- ・ β_{0j} は、平均 $\gamma_{00} + \gamma_{01} w_j$ 分散 τ^2 の正規分布から生まれている。

○ 母集団モデル（尤度）

（表現1）※この形式では表現できない！

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{1ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} w_{1j} + u_{0j}$$

$$u_{0j} \sim N(0, \tau^2)$$

（表現2）

$$y_{ij} \sim N(\beta_{0j} + \beta_1 x_{1i}, \sigma^2)$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} w_{1j} + u_{0j}$$

$$u_{0j} \sim N(0, \tau^2)$$

（表現3）

$$y_{ij} \sim N(\beta_{0j} + \beta_1 x_{1i}, \sigma^2)$$

$$\beta_{0j} \sim N(\gamma_{00} + \gamma_{01} w_{1j}, \tau^2)$$

学びのポイント6 添え字 j を表現するやり方を学ぼう！

$$\beta_{0j} + \beta_1 x_{1ij}$$

$$\text{beta0}[\text{ScriptJ}[i]] + \text{beta1} * x[i]$$

■ stan のコード

Model 03 (MixedEffects1)

```

1  data {
2    int          N ;
3    int          J ;
4    vector [N]   y ;
5    vector [N]   x ;
6    vector [J]   w1 ;
7    int <lower = 1, upper = J> ScriptJ[N];
8  }
9
10 parameters {
11   real          gamma00;
12   real          gamma01;
13   real <lower = 0> tau;
14   real          beta1 ;
15   real          u0[J];
16   real < lower = 0 > sigma ;
17 }
18
19 transformed parameters {
20   vector [J] beta0;
21   for(j in 1:J) beta0 = gamma00 + gamma01 * w1[j] + u0[j];
22 }
23
24 model {
25   for(j in 1:J) u0[j] ~ normal(0, tau);
26   for(i in 1:N) y[i] ~ normal(beta0[ScriptJ[i]] + beta1 * x[i], sigma);
27
28 }

```

学びのポイント 6 transformed parameters を活用しよう！

「パラメータ = 」という形を transformed parameters で記述。

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}w_1 + u_{0j}$$

```
for(j in 1:J) beta0 = gamma00 + gamma01 * w1[j] + u0[j];
```

線形混合効果モデル（モデル3：ランダム切片②）



【目標】 for ループではなく、ベクトルを用いて表現する
vector を用いて高速化を図る。

○ 母集団モデル（尤度）

（表現1）※この形式では表現できない！

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{1ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} w_{1j} + u_{0j}$$

$$u_{0j} \sim N(0, \tau^2)$$

（表現2）

$$y_{ij} \sim N(\beta_{0j} + \beta_1 x_{1i}, \sigma^2)$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} w_{1j} + u_{0j}$$

$$u_{0j} \sim N(0, \tau^2)$$

（表現3）

$$y_{ij} \sim N(\beta_{0j} + \beta_1 x_{1i}, \sigma^2)$$

$$\beta_{0j} \sim N(\gamma_{00} + \gamma_{01} w_{1j}, \tau^2)$$

■ stan のコード

Model 03 (MixedEffects2)

```
1 data {
2   int          N;
3   int          J;
4   vector [N]   y;
5   vector [N]   x;
6   vector [J]   w1;
7   int <lower = 1, upper = J> ScriptJ[N];
8 }
9
10 parameters {
11   real          gamma00;
12   real          gamma01;
13   real <lower = 0> tau;
14   real          beta1 ;
15   real          u0[J];
16   real < lower = 0 > sigma ;
17   real          beta0[J] ;
18 }
19
20 transformed parameters{
21 }
22
23 model {
24   for(j in 1:J) beta0[j] ~ normal(gamma00+gamma01*w1[j], tau);
25   for(i in 1:N) y[i] ~ normal(beta0[ScriptJ[i]] + beta1*x[i], sigma);
26 }
```

学びのポイント 6 model セクションの式の順番に注意！

y の式は、beta0 の式が定義されないと決まらないので、レベル 2 の式を最初を書く。

×) ダメな例

```
for(i in 1:N) y[i] ~ normal(beta0[ScriptJ[i]] + beta1*x[i], sigma);
for(j in 1:J) beta0[j] ~ normal(gamma00+gamma01*w1[j], tau);
```