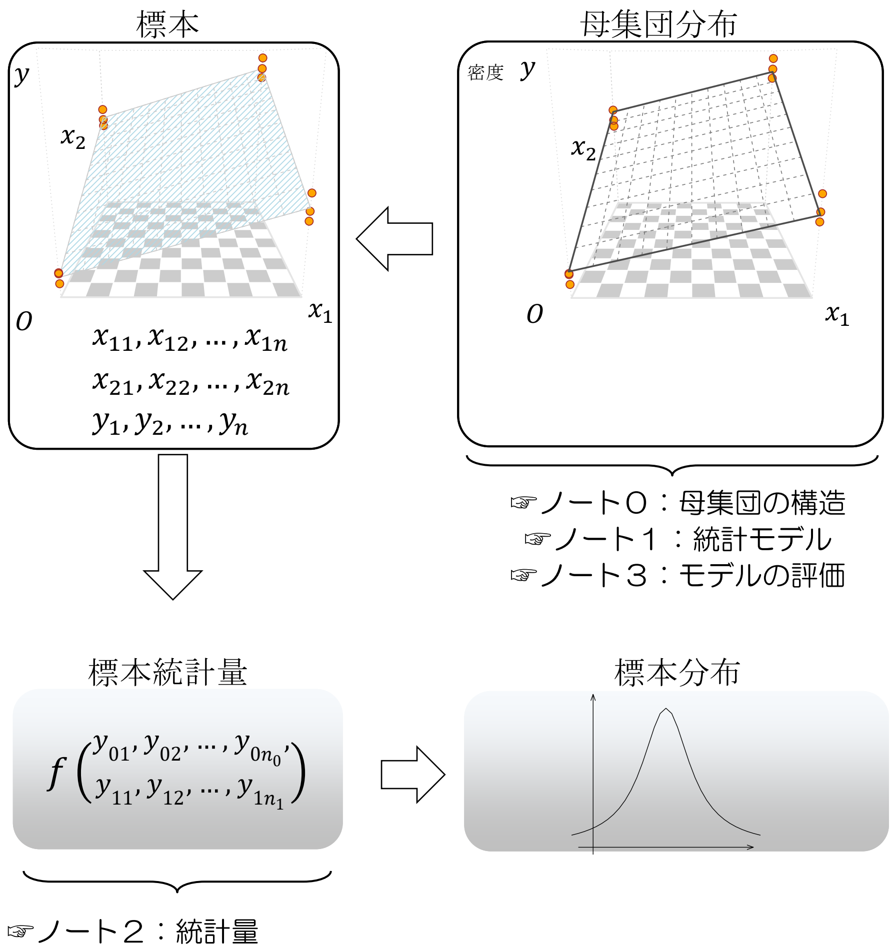
第7講　線形混合効果モデル

学習の目標

- ☐ グループ化された（階層性を持つ）データの具体例が挙げられる。
- ☐ 階層性を持つデータには「個々の観測値が独立ではない」という性質があり、通常の回帰分析の使用が不適切であることが分かる。
- ☐ 対応のない要因とある要因の違いが分かり、対応のある t 検定／分散分析を理解、実施できる。
- ☐ 一般混合効果モデルの例として、(i) ランダム切片モデル、(ii) ランダム係数モデル、(iii) 交差分類モデルが位置づけられることが分かる。
- ☐ 線形混合効果モデルの点推定に最尤推定法、または、制約付き最尤推定法が用いられることが分かる。
- ☐ 線形混合効果モデルでは、級内相関係数によって投入したレベル２の貢献度が評価できるということが分かる。
- ☐ モデルの適切さを評価するため、重回帰同様、情報量基準やクロスバリデーションに基づくモデル比較（選択）を行うことが分かる。
- ☐ 残差を分析することで、想定したグループ内の独自性を吟味することができることが分かる。

見取り図



データの形式

ID	固定効果１	固定効果２	…	変量効果ｐ	応答変数
1	1	0	…	1	2.1
2	0	1	…	2	3.2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	0	…	48	1.5

（1）目的（リサーチクエスチョン）

グループ化された（階層性を持つ）データに対し、被験者やアイテムといった変量効果を適切にモデルに組み込み、固定効果が従属変数にどのくらいの効果量を持つか調べる手法。

（2）考え方

言語実験を行う際には、研究の主眼となる独立変数のほかに、その実験を受けてくれた被験者（実験協力者）が誰だったのか、あるいは、提示した刺激文（アイテム）がいったい何だったのか、という要因によって従属変数の値が変化してしまうことが予想される。このような、その分析のためだけにたまたま集められた人や、たまたま使用したアイテムの影響をきちんと統計モデルに取り込んで分析を行うために用いられるのが、今回習う線形混合効果モデルである。

とりわけ、あまた存在する様々な線形混合効果モデルの中で、実験言語学で最もスタンダードな「交差分類モデル」について理解を深めることが今回の目的である。

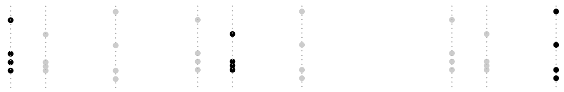
（3）具体的なデータの例

ID	Item	R1	R2	R3	R4	独立変数１	独立変数２	実験協力者	従属変数
1	1	Since yesterday	I have been **walking**	with	my friends.	0	0	山田	
2	1	Yesterday	I have been **walking**	with	my friends.	1	0	山田	
3	1	Since yesterday	I **walked**	with	my friends.	0	1	山田	
4	1	Yesterday	I **walked**	with	my friends.	1	1	山田	
5	2	Since yesterday	I have been **cooking**	with	my friends.	0	0	山田	
6	2	Yesterday	I have been **cooking**	with	my friends.	1	0	山田	
7	2	Since yesterday	I **cooked**	with	my friends.	0	1	山田	
8	2	Yesterday	I **cooked**	with	my friends.	1	1	山田	
⋮									
93	24	Since yesterday	I have been **swimming**	with	my friends.	0	0	山田	
94	24	Yesterday	I have been **swimming**	with	my friends.	1	0	山田	
95	24	Since yesterday	I **swam**	with	my friends.	0	1	山田	
96	24	Yesterday	I **swam**	with	my friends.	1	1	山田	
97	Filler 1		I am exicted.					山田	
98	Filler 2		I am surprised.					山田	
⋮									
288	Filler 196		I am satisfied.					山田	

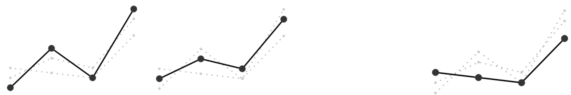
ノート0　母集団：データの構造

（1）グループ化されたデータ

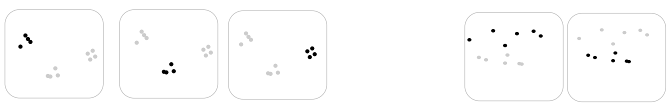
① 反復測定データ（Repeated measures data）
これは、同一の測定単位に対して、複数のデータを採取したデータ。

	個人 1	個人 2	…	個人 j
観測値				

② 経時観察データ（Longitudinal data）
これは、反復測定データのうち、経時的に順序を変更できないもののこと。

	個人 1	個人 2	…	個人 j
観測値				

③ 階層データ（Multilevel data）
これは、測定単位に複数の階層（レベル）が存在しているデータ。

	学校 1			…	学校 j	
	A 組	B 組	C 組		1 組	2 組
観測値						

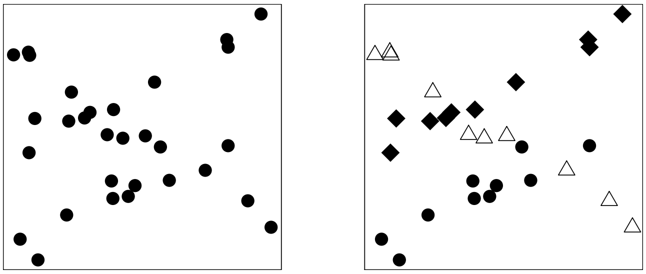
（2）グループ化されたデータの統計的特徴

個々のデータが互いに独立ではない！

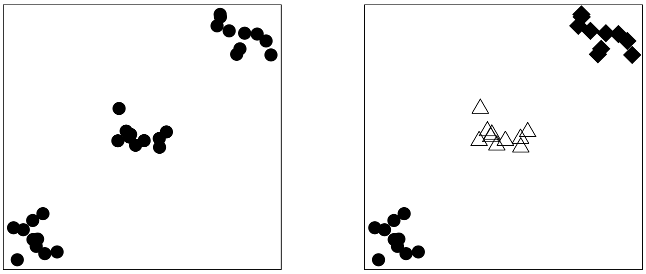
（３）普通の回帰分析を行うことの問題

データの階層性を考慮せず、すべてのデータが独立であると仮定すると歪んだ解釈をしてしまう場合がある。

（ケース１）本当は強い関係があるのに見つけられない！



（ケース２）本当は関係がないのにあると思ってしまう！



（４）マルチレベルモデル Multilevel model

これは、確率変数が、誤差項のほかにもう一つ存在するモデルのこと。階層モデル Hierarchical model とも呼ばれる。

① マルチレベル回帰（階層線形モデル/一般混合効果モデル）

回帰分析に複数のレベルを組み込んだモデル。

② マルチレベル相関分析

集団・個人レベルでの相関を見る。他のマルチレベル分析の予備解析で使われる。

③ マルチレベル構造方程式モデリング

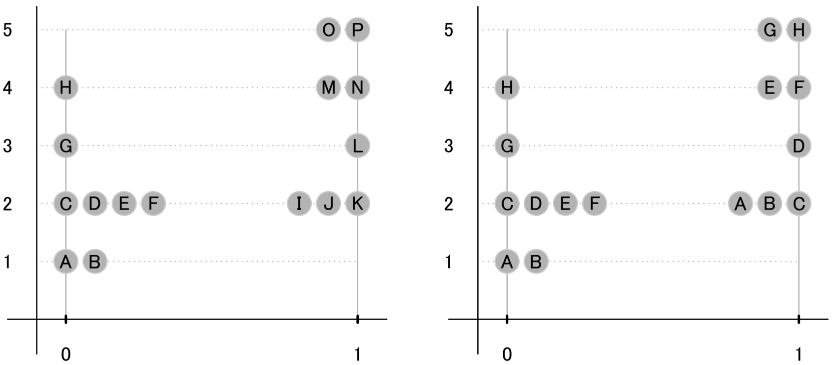
潜在変数を取り入れたマルチレベルモデルのこと。

増補１：対応のあり・なし

（１）対応のあり・なし

① 対応のない要因： 異なるグループに含まれる従属変数の値が互いに独立となるような要因のこと。

② 対応のある要因： 異なるグループに含まれる従属変数の値に相関がある要因のこと。



（例１）日本人とアメリカ人のテストの点数

（例２）授業前と授業後のテストの点数

（２）固定効果要因と変量効果要因

① 固定効果要因 Fixed-effects factor
推定されるパラメータが定数であるもの。

② 変量効果要因 Random-effects factor
推定されるパラメータが確率的挙動を示すもの。

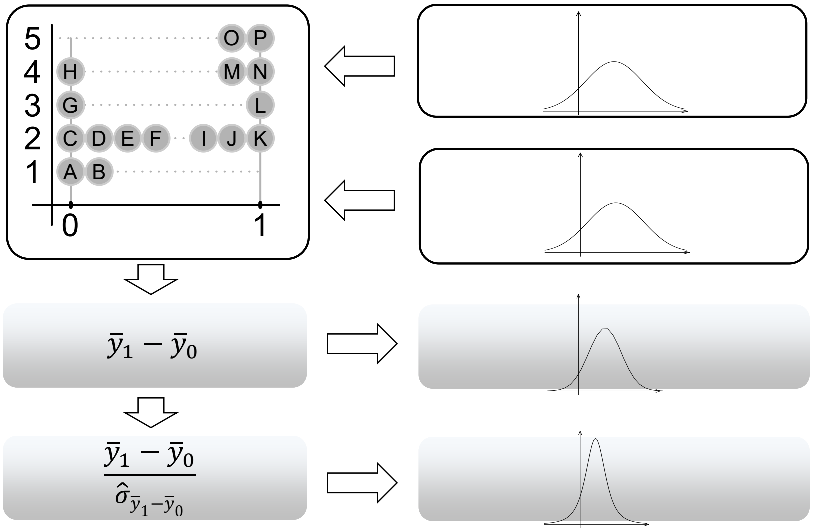
$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

$$\sum_i^I \alpha_i = 0, \qquad e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

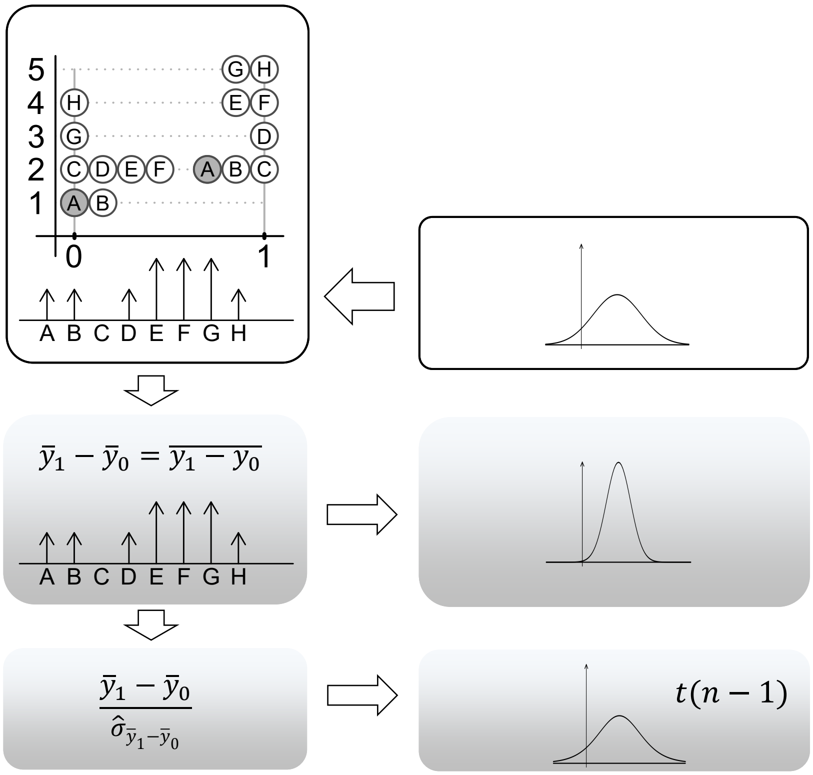
※ マルチレベルモデルでは、変量効果をギリシャ文字で表す慣習がある。

📖 増補２：対応のあるｔ検定

（１）対応のないｔ検定（復習）



（２）対応のあるｔ検定



自由度$n-1$のｔ分布

📖 ノート１　母集団：統計モデル１（線形混合効果モデル）

どのパラメータにグループの効果を認めるのかで様々なモデルを作ることができる。ここでは、その基礎となるモデルを学ぶ。

モデル式が複雑になって、なんだか、わかんなくなっちゃう！

こういう感覚に陥ったらまず深呼吸！レベル 1 とレベル 2…と階層に分けて分析してみよう。レベル 2 はグループレベルで成り立つ関係、レベル 1 はグループ内の個体で成り立つ関係だよ。

（1）ランダム切片モデル Random-intercept models

これは、レベル 1 の切片が、グループによってランダムに変化するという構造が表されたモデル。

例１　ランダム切片モデル

（要因 A）どの動詞を用いているか　　　変量

[1] a. Which author did you *think* [__ supported him]?

b. Which author did you *say* [__ supported him]?

⋮

j. Which author did you *predict* [__ supported him]?

レベル１
$$y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$$
$$e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

レベル２
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$
$$u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}^2)$$

例２ 平均に関する回帰モデル Means-as-outcomes-model

（要因 A）どの動詞を用いているか　　　変量

（要因 B）その動詞は意図性を持つか否か　　　固定

[1] a. Which author did you *think* [__ supported him]?

b. Which author did you *say* [__ supported him]?

⋮

j. Which author did you *predict* [__ supported him]?

レベル１
$$y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$$
$$e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

レベル２
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} w_j + u_{0j}$$
$$u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}^2)$$

（２）ランダム係数モデル Random-coefficient models

これは、レベル 1 の切片が、グループによってランダムに変化するという構造が表されたモデル。

例１　ランダム係数モデル

（要因 A）学年　固定
（要因 B）回答している人　変量

レベル１
$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_{1j}x_{1ij} + e_{ij}$$
$$e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

レベル２
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$
$$u_{1j} \sim N(0, \tau_{11}^2)$$

例２ 係数に関する回帰モデル Means-as-outcomes-model

（要因 A）学年　固定
（要因 B）回答している人　変量

レベル１
$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{1ij} + e_{ij}$$
$$e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

レベル２
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}w_j + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}w_j + u_{1j}$$
$$u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}^2)$$
$$u_{1j} \sim N(0, \tau_{11}^2)$$
$$\mathrm{Cov}(u_{0j}, u_{1j}) = \tau_{01}^2$$

（例）観察研究：生徒　←　学校　＞　クラス／担任

	学校 1	学校 2	…	学校 *j*
クラス／担任 1	☺ ☺ ☺		…	
クラス／担任 2	☺ ☺		…	
クラス／担任 3	☺ ☺		…	
クラス／担任 4		☺ ☺	…	
クラス／担任 5		☺ ☺ ☺	…	
⋮	⋮	⋮		⋮
クラス／担任 *k*-2			…	☺ ☺
クラス／担任 *k*-1			…	☺ ☺
クラス／担任 k			…	☺ ☺ ☺

※ 独立変数のセンタリング Centering

① センタリングなし

これは、観測されたxの値をそのままモデルに投入するというもの。

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{ij} + e_{ij}$$

解釈ができないのであれば、レベル 2 の構造を想定することにもあまり意味がない。

② 群平均センタリング Group-mean centering

これは、レベル 1 の変数xに対し、レベル 2 の単位ごとの平均$\bar{x}_j$を引いてから、モデルに投入すること。

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right) + e_{ij}$$

【解釈】β_{0j}は、変数xの値がレベル 2 の単位の平均に等しいときのyの予測値となる。

③ 全体平均センタリング Grand-mean centering

これは、レベル 1 の変数xに対し、全体の平均$\bar{x}$を引いてから、モデルに投入すること。

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(x_{ij} - \bar{x}\right) + e_{ij}$$

【解釈】β_{0j}は、変数xの値が全体平均$\bar{x}$に等しいときのyの予測値となる。

（３）交差分類モデル Cross-classified model

これは、各観測値が、二つ（以上の）独立した階層構造に含まれているモデル。

（例１）観察研究： 生徒 ← 学校 ＋ 全国模試

	学校 1	学校 2	…	学校 j
全国模試 1	☺☺☺	☺	…	☺☺
全国模試 2	☺☺	☺☺☺☺	…	☺☺
⋮	⋮	⋮		⋮
全国模試 k	☺☺☺	☺☺	…	☺

（例２）実験研究： 容認度 ← 文 ＋ 回答者

	文 1	文 2	…	文 j
回答者 1	▪▪▪▪	▪▪▪▪	…	▪▪▪▪
回答者 2	▪▪▪▪	▪▪▪▪	…	▪▪▪▪
⋮	⋮	⋮		⋮
回答者 k	▪▪▪▪	▪▪▪▪	…	▪▪▪▪

レベル１

$$y_{i(jk)} = \beta_{0(jk)} + \beta_0 x_{1i(jk)} + e_{i(jk)}$$
$$e_{i(jk)} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

レベル２

$$\beta_{0(jk)} = \gamma_{00} + u_{0j} + v_{0k}$$
$$u_{0j} \sim N(0, \sigma_u^2)$$
$$v_{0k} \sim N(0, \sigma_v^2)$$

$$cov\left(y_{i(jk)}, y_{i'(jk')}\right) = \sigma_u^2$$
$$cov\left(y_{i(jk)}, y_{i'(j'k)}\right) = \sigma_v^2$$
$$cov\left(y_{i(jk)}, y_{i'(j'k')}\right) = 0$$
$$var\left(y_{i(jk)}\right) = cov\left(y_{i(jk)}, y_{i'(jk)}\right) = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

📖 増補： 母集団　統計モデル２（対応のある分散分析）

ケース１　一元配置（対応なし）

（要因 A）that が発音されているかいないか　　固定

[1] a. Which author do you think [__ supported him]?

b. Which author do you think [that __ supported him]?

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

$\sum_i^I \alpha_i = 0,$　　　　$e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$

ケース２　二元配置（対応なし）

（要因 A）主語／目的語を問う疑問詞か　　固定

（要因 B）that が発音されているかいないか　　固定

[1] a. Which author do you think [he supported __]?

b. Which author do you think [that he supported __]?

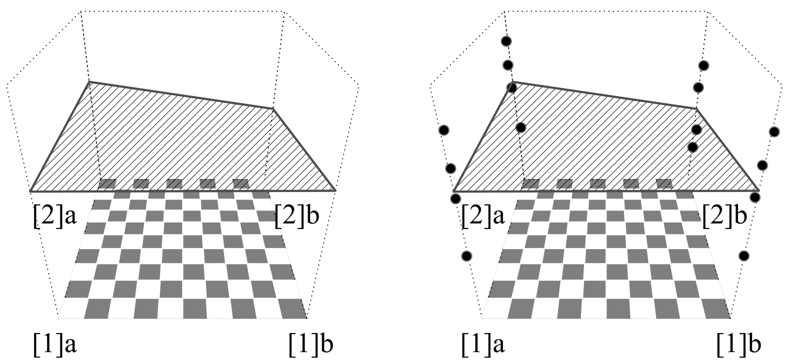
[2] a. Which author do you think [__ supported him]?

b. Which author do you think [that __ supported him]?

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ijk}$$

$\sum_i^I \alpha_i = 0,$　　$\sum_j^J \beta_j = 0,$　　$\sum_i^I \sum_j^J \alpha\beta_{ij} = 0,$

$e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$



ケース３　一元配置（対応あり）

（要因 A）that が発音されているかいないか　固定

（要因 B）誰が容認度を回答しているか　変量

[1] a. Which author do you think [__ supported him]?

b. Which author do you think [that __ supported him]?

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + u_j + e_{ijk}$$

$$\textstyle\sum_i^I \alpha_i = 0, \quad u_j \sim N(0, \sigma_B^2), \quad e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

ケース４　二元配置（対応あり）

（要因 A）主語／目的語を問う疑問詞か　固定

（要因 B）that が発音されているかいないか　固定

（要因 C）誰が容認度を回答しているか　変量

[1] a. Which author do you think [he supported __]?

b. Which author do you think [that he supported __]?

[2] a. Which author do you think [__ supported him]?

b. Which author do you think [that __ supported him]?

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + u_k + e_{ijkl}$$

$$\textstyle\sum_i^I \alpha_i = 0, \quad \sum_j^J \beta_j = 0, \quad \sum_i^I \sum_j^J \alpha\beta_{ij} = 0,$$

$$u_k \sim N(0, \sigma_C^2), \quad e_{ijkl} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

ケース５　交差分類モデル

（要因 A）主語／目的語を問う疑問詞か　固定

（要因 B）that が発音されているかいないか　固定

（要因 C）誰が容認度を回答しているか　変量

（要因 D）どの文を回答しているか　変量

[1] a. Which author do you think [he supported __]?

b. Which author do you think [that he supported __]?

[2] a. Which author do you think [__ supported him]?

b. Which author do you think [that __ supported him]?

$$y_{ij(kl)m} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + u_{0k} + v_{0l} + e_{ij(kl)m}$$

$$\textstyle\sum_i^I \alpha_i = 0, \quad \sum_j^J \beta_j = 0, \quad \sum_i^I \sum_j^J \alpha\beta_{ij} = 0,$$

$$u_{0k} \sim N(0, \tau_{00}^2), \quad v_{0l} \sim N(0, \kappa_{00}^2), \quad e_{ij(kl)m} \sim N(0, \sigma^2)$$

📖 ノート２ 統計量：線形混合効果モデルにおける点推定

（ここでは、頻度主義における推定方法について考える）

（１）最小二乗法

複数の変量効果を推定する必要がある時には、単純な最小二乗法では推定にバイアスが生じてしまう。

⇒　線形混合効果モデルでは用いられない。

（２）最尤推定法 Maximum Likelihood Method

尤度を最大にするモデルを推定する。

① 利点
尤度を用い推定するパラメータ全体のデータとの当てはまりを考慮するため複数の変量効果に対応できる。

② 欠点：分散成分の推定
最尤推定量は、漸近的不偏性を持つが不偏性はない。標本数が少ない時、分散成分の推定にバイアスが生じる。
（⇒ 分散が過小評価される）

（３）制約付き最尤推定法 Restricted Maximum Likelihood Method

固定効果たちは最小二乗法で、変量効果の分散は、固定効果を周辺化した周辺尤度関数をもとに最尤法で算出。

① 利点
ある条件の下、σ^2に対して不偏な推定量を構成できる。
（⇒ これは、固定効果を積分消去することで自由度を減らせるから）

② 欠点
- サンプルサイズが大きい場合は、最尤法の方が推定精度がいい（標準誤差が小さい）。
- 対数尤度や情報量基準については最尤法の方が柔軟。

📖 ノート３ 分析の評価

（１）分析の評価１：作った統計モデルの正確さを評価

（参照：第４講ノート５、第５講ノート４，第６講ノート３）

グループ要因を複数取り入れたことで、従属変数の予測はどれくらい正確になったのかを測る指標を作成する。

☞ 級内相関係数 Intraclass correlation coefficient（ICC）

これは、全体の分散のうち、レベル２の分散が占める割合。

※ 別名：分散分割係数 Variance Partitioning Coefficient, VPC

（例１）ランダム切片モデル

レベル１ $y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$

$e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

レベル２ $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$

$u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}^2)$

標本級内相関係数$\hat{\rho}$　　母集団級内相関係数ρ

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\tau}_{00}}{\hat{\tau}_{00} + \hat{\sigma}^2} \qquad \rho = \frac{\tau_{00}}{\tau_{00} + \sigma^2}$$

（例２）交差分類モデル

レベル１ $y_{i(jk)} = \beta_{0(jk)} + e_{i(jk)}$

$e_{i(jk)} \sim N(0, \sigma^2)$

レベル２ $\beta_{0(jk)} = \gamma_{00} + u_{0j} + v_{0k}$

$u_{0j} \sim N(0, \tau_{00}^2)$

$v_{0k} \sim N(0, \kappa_{00}^2)$

標本級内相関係数　　母集団級内相関係数

$$\hat{\rho}_u = \frac{\hat{\tau}_{00}}{\hat{\tau}_{00} + \hat{\kappa}_{00}^2 + \hat{\sigma}^2} \qquad \rho_u = \frac{\tau_{00}}{\tau_{00} + \kappa_{00}^2 + \sigma^2}$$

$$\hat{\rho}_v = \frac{\hat{\kappa}_{00}}{\hat{\tau}_{00} + \hat{\kappa}_{00}^2 + \hat{\sigma}^2} \qquad \rho_v = \frac{\kappa_{00}}{\tau_{00} + \kappa_{00}^2 + \sigma^2}$$

（２）分析の評価２：係数の推定値の正確さの評価

（参照：第 4 講ノート４、第 5 講ノート５，第 6 講ノート４）

ケース５　交差分類モデル

（要因 A）	主語／目的語を問う疑問詞か	固定
（要因 B）	that が発音されているかいないか	固定
（要因 C）	誰が容認度を回答しているか	変量
（要因 D）	どの文を回答しているか	変量

[1] a. Which author do you think [he supported __]?
b. Which author do you think [that he supported __]?
[2] a. Which author do you think [__ supported him]?
b. Which author do you think [that __ supported him]?

```
> library(lmerTest)
> lmer1 = lmer(formula =Y ~ A * B + (1|item)+ (1|subj), data, REML = FALSE)
> lmer2 = lmer(formula =Y ~ A * B + (1|item)+ (1|subj), data, REML = TRUE)
> summary(lmer1); confint(lmer1)
```

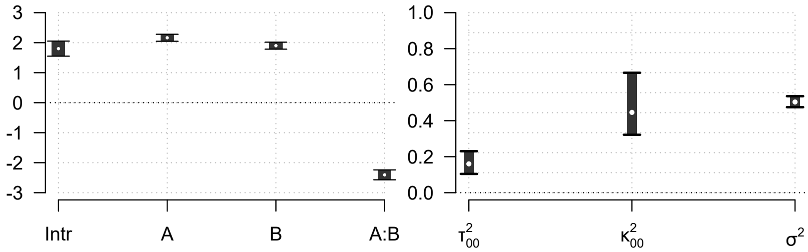
① 最尤推定法

	点推定値	標準誤差	自由度	*t* 値	*p* 値
切片	*1.80*	*0.12*	*21.36*	*14.75*	1.12e-12
A1	*2.16*	*0.06*	*524.94*	*36.33*	＜2e-16
B1	*1.90*	*0.06*	*524.94*	*32.00*	＜2e-16
A1:B1	*-2.40*	*0.08*	*524.94*	*-28.63*	＜2e-16

② 制約付き最尤推定法

	点推定値	標準誤差	自由度	*t* 値	*p* 値
切片	*1.80*	*0.13*	*19.75*	*14.36*	6.51e-12
A1	*2.16*	*0.06*	*522*	*36.33*	＜2e-16
B1	*1.90*	*0.06*	*522*	*31.91*	＜2e-16
A1:B1	*-2.40*	*0.08*	*522*	*-28.55*	＜2e-16

信頼区間

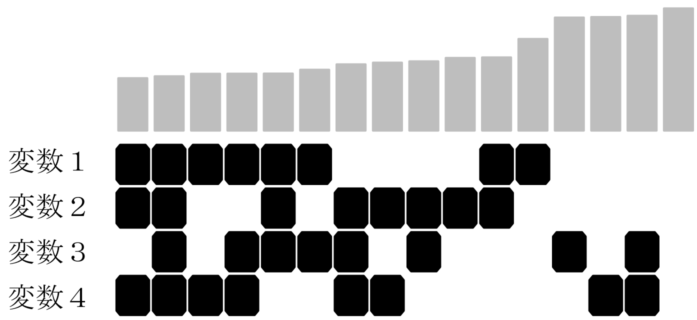


（３）分析の評価３：想定した統計モデルの適切さの評価

（参照：第４講ノート６、第５講ノート６，第６講ノート５）

① モデル選択

クロスバリデーションや情報量基準を用いてモデル比較を行い、最良のモデルを選択し、解釈する。



② 残差（変量効果）の分析

変量効果は固定効果では説明のできない独自性を反映している。特徴的な個体がないか検証するときに有益。

Random effects:

Groups	*Variance*	*Std.Dev.*
item (Intercept)	*0.03*	*0.160*
subj (Intercept)	*0.21*	*0.460*
Residual	*0.26*	*0.505*

Number of obs: 576, groups:　item, 36; subj, 16